Diplomarbeit

Über $\Gamma_0(n)$ und seinen Normalisator in den rationalen Fällen

Markus Püschel

eingereicht am mathematischen Institut II
der Universität Karlsruhe

Referent: Prof. Dr. H.W. Leopoldt

Karlsruhe, Dezember 1994

Für meine Mutter

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Theorie der Modulgruppe $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$, also der Substitutionen

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} , \qquad a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ ad-bc=1$$

der oberen komplexen Halbebene $\mathbb{H}$, und ihrer Invarianten, den Modulfunktionen und Modulformen, ist ein Paradebeispiel für Vielseitigkeit und Schönheit in der Mathematik.
Der auf diesem Gebiet unerfahrene Mathematiker ist sehr schnell in der Lage, viele der Ergebnisse, die im letzten Jahrhundert entstanden sind, für sich selbst neu zu entdecken. Bei tieferem Eindringen in die Materie begegnet man fast allen mathematischen Disziplinen, mit denen man im Laufe seines Studiums konfrontiert wird: Funktionentheorie, Algebra, Zahlentheorie, Geometrie und Topologie.
Diese Vielfalt macht den besonderen Reiz der Thematik aus, läßt komplexe Zusammenhänge und faszinierende Rätsel auftreten.

Hintergrund und Vorgeschichte

Ihren Ursprung findet die Theorie der Modulfunktionen in der Theorie der elliptischen Funktionen von Jacobi (1804-51). Die dabei auftretenden Fragen und Zusammenhänge schienen um die Jahrhundertwende bereits nahezu erschöpfend geklärt zu sein (siehe z.B. das Standardwerk „Theorie der elliptischen Modulfunktionen“ von Klein/Fricke), als der geniale, intuitive Mathematiker Ramanujan 1916 eine Lawine lostrat.
Er vermutete - damals völlig überraschend - daß die Koeffizientenfunktion τ der Modulform

$$\begin{aligned} D(z) &= q\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{24} \\ &= \sum_{n\geq 1}\tau(n)q^n , \qquad q=e^{2\pi i z} \end{aligned}$$

schwach multiplikativ ist, sodaß sich eine Dirichletreihe zuordnen läßt

$$L(s,\tau) = \sum_{n\geq 1}\tau(n)n^{-s} ,$$

die ein Eulerprodukt besitzt und damit wesentlich mit den Primzahlen zusammenhängt. Mordell konnte diese Behauptung zwar wenig später beweisen, doch die eigentliche Aufklärung begann erst mit Heckes großer Arbeit über „Modulformen und Dirichletsche Reihen mit Eulerschem Produkt“ in den 30er Jahren, in der er die Maschinerie entwickelt um solche Modulformen - und damit eine Vielzahl von Eulerprodukten - zu gewinnen.
Damit wurde klar, daß den Primzahlen eine viel größere Bedeutung zukommt, als bis dahin angenommen wurde.
Die Aufgabe, für diese Eulerprodukte strukturelle Deutungen zu finden, ist einer der Hauptgegenstände der zahlentheoretischen Arbeit der Gegenwart. Als eindrucksvolle Beispiele seien hier die Taniyama-Weil- Vermutung und die jüngsten Ergebnisse zum Fermatproblem erwähnt.

Ein anderes Problem, und damit verbunden eine ganze Reihe von Rätseln, tauchte vor ca. 20 Jahren auf in Verbindung mit der Klassifikation aller endlichen, einfachen Gruppen.
Neben den von Chevalley vervollständigten Serien der endlichen, einfachen Liegruppen fand man einzelne Ausnahmefälle. Diese bilden die heute für vollständig gehaltene Liste der 26 sporadischen Gruppen.
Die größte dieser Ausnahmegruppen ist das sogenannte Fischer-Griess'sche Monster M, eine einfache

Gruppe der Ordnung

$$|M| = 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^{9} \cdot 7^{6} \cdot 11^{2} \cdot 13^{3} \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 \ .$$

Hierzu aus [FLM] S.xv,xvi:

> *A characteristic feature of modern mathematics is its love of generalities, but this has not prevented the discovery of some exceptional structures, which have held their own against the best examples of classical mathematics. One such modern structure [is] the largest sporadic finite simple group, called the monster,...*

und weiter

> *A few years after this group was predicted to exist, and even before the group was constructed by Griess, mathematicians began to accumulate numerous astonishing facts, now collectively known as monstrous moonshine* [siehe dazu [CN]], *on its relation to the theory of modular functions.*

Die Modulfunktionen von Γ bilden einen rationalen Körper K_Γ, der von einer Funktion J (absolute Invariante oder Hauptmodul) über $\mathbb{C}$ erzeugt wird:

$$K_\Gamma = \mathbb{C}(J) \ .$$

Nach Normierung hat J die Gestalt

$$J = q^{-1} + 0 + 196884q + 21493760q^2 + \dots$$

Die Koeffizienten schienen keine Besonderheiten aufzuweisen, bis McKay und dann Thompson herausfanden, daß sie einfache Summen $H_i(1)$ von Graden von Darstellungen (den Charakterwerten der Hauptklasse) des Monsters sind.
Weitere faszinierende Übereinstimmungen betreffen die Untergruppen $\Gamma_0(n),\ n \in \mathbb{N}$ von Γ und die zugehörigen Körper $K_{\Gamma_0(n)}$ der invarianten Funktionen:

$$\Gamma_0(n) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \in \Gamma,\ n|c \right\} \ .$$

Diese Gruppen entstehen in natürlicher Weise, wenn man eine sogenannte Transformierte J_n von J betrachtet

$$J_n(z) = J(nz)$$

dann ist

$$K_{\Gamma_0(n)} = K_\Gamma(J_n) = \mathbb{C}(J, J_n) \ .$$

Als erstes fiel auf, daß die Primzahlen p, die die Ordnung von M teilen, genau die sind, für die das Geschlecht des Normalisators von $\Gamma_0(p)$ in $PSL_2^+(\mathbb{R}) = 0$ ist.
Ein viel tieferer Zusammenhang wurde von Thompson wenig später entdeckt: ersetzt man die Koeffizienten von J durch Charaktere H_i gewisser Darstellungen von M an einer Stelle $m \in M$

$$T_m = q^{-1} + 0 + H_1(m)q + H_2(m)q^2 + \dots$$

so erhält man die Erzeugende eines rationalen Funktionenkörpers, der zu einer Gruppe mit Geschlecht 0 gehört, die zwischen $\Gamma_0(n)$ und seinem Normalisator in $PSL_2^+(\mathbb{R})$ liegt. Ein beträchtlicher Teil dieser „monstrous moonshine“-Hypothesen ist mittlerweile bewiesen (siehe dazu [FLM]) und weist viele Querverbindungen zur Lietheorie und Stringtheorie auf.

Die von Haus aus eher uninteressanten rationalen Fälle spielen hier die Hauptrolle und der Wunsch nach der expliziten Darstellung von erzeugenden Funktionen für Gruppen vom Geschlecht 0 zwischen $\Gamma_0(n)$ und seinem Normalisator ergibt sich von selbst. Er lieferte auch die Motivation für die vorliegende Arbeit.

Aufgabenstellung

In dieser Diplomarbeit werden Gruppen zwischen $\Gamma_0(n)$ und seinem Normalisator ermittelt, die Geschlecht 0 haben und in vielen Fällen die erzeugende Funktion explizit angegeben. Besondere Aufmerksamkeit und vollständige Ergebnisse wurden bei den Gruppen $\Gamma_0(n)$ selbst und dem Teil ihres Normalisators, der durch Translationen erzeugt wird, erzielt.

Hier eine Kurzübersicht über die Kapitel:

Kapitel I: Versuch einer kürzestmöglichen Einführung in die Grundbegriffe der Modulgruppe, ihrer Untergruppen und der zugehörigen Funktionen sowie Transformationstheorie.

Kapitel II: Anwendung der Ergebnisse von Kapitel I auf die Untergruppen $\Gamma_0(n)$, Berechnung aller diesbezüglicher Daten sowie der Fundamentalbereiche, außerdem einige, in der Literatur nicht zu findende, Aussagen zu Spitzen und Erzeugendensysteme. Konstruktion von Funktionen mit einem Satz von Newman.

Kapitel III: Berechnung der erzeugenden Modulfunktionen für $\Gamma_0(n)$ im Fall Geschlecht $= 0$, Angabe der wichtigen Größen und Fundamentalbereiche von $\Gamma_0(n)$ in diesen Fällen, einige Funktionswerte und Eigenschaften der Erzeugenden.

Kapitel IV: Zusammenstellung des aktuellen Wissensstandes über den Normalisator von $\Gamma_0(n)$, wie z.B. Fricke-Involution, Berechnung von „Geschlecht $= 0$“-Fällen und einiger Erzeugenden, vollständige Behandlung des „Translationsteils“ des Normalisators.

Danksagung

Bei Herrn Prof. Dr. H.W. Leopoldt bedanke ich mich recht herzlich für das schöne Thema dieser Arbeit, für sein Interesse an deren Fortgang und die sehr gute Betreuung.

Danken möchte ich Herrn Dr. M. Schneider, bei dem ich das Skript in Latex umsetzen durfte und der mir diesbezüglich viele Tips gab.

Außerdem danke ich Harald Heib, mit dem ich die Grafiken erstellte und der geduldig meine vielen Sonderwünsche ertrug.

Mein besonderer Dank gilt meinen Eltern, die mein Studium ermöglichten.

Kapitel I

Grundlagen über die Modulgruppe und Modulfunktionen

Literatur: [S] Bruno Schoeneberg
Elliptic Modular Functions
Springer Verlag

1 Die Modulgruppe

1.1 Definition

Die Modulgruppe begegnet uns in zwei Formen, zwischen denen jedoch eine enge Beziehung besteht.

Definition 1 *Wir setzen*

$$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\ a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ \det(A) = ad - bc = 1 \right\}$$

und nennen Γ *die „homogene Modulgruppe".*

Es bezeichne $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die (kompakte) Riemannsche Zahlenkugel, wobei mit dem Symbol ∞ wie üblich gerechnet wird. Jeder homogenen Modulsubstitution

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

läßt sich eine gebrochen-lineare Abbildung (inhomogene Modulsubstitution) von $\hat{\mathbb{C}}$ zuordnen:

$$\begin{aligned} \overline{A} \ :\ & \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \\ & z \mapsto \overline{A}(z) = \frac{az+b}{cz+d}\ . \end{aligned}$$

Definition 2 *Wir setzen*

$$\overline{\Gamma} = PSL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \overline{A} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}},\ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d};\ A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma \right\}$$

und nennen $\overline{\Gamma}$ *die „inhomogene Modulgruppe“.*

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : \quad & \Gamma \to \overline{\Gamma} \\ & A \mapsto \overline{A} \end{aligned}$$

ist ein Homomorphismus mit

$$\mathrm{Kern}\phi = \{\pm I\}$$

und wir erhalten

$$\overline{\Gamma} \cong \Gamma / \{\pm I\} \ .$$

1.2 Gruppenstruktur

[S] S.14ff

Wir setzen

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(S=Spiegelung, T=Translation)

und haben dann

Satz 1 *Die Elemente R,S,T genügen den Relationen*

$$S^2 = R^3 = -I,\ R = ST$$

und erzeugen die homogene Modulgruppe Γ

$$\Gamma = < R, S, T >$$

Für die Bilder $\overline{R}, \overline{S}, \overline{T}$ *in der inhomogenen Modulgruppe* $\overline{\Gamma}$*, also für die Substitutionen*

$$\overline{R} = z \mapsto -\frac{1}{z+1}, \qquad \overline{S} = z \mapsto -\frac{1}{z}, \qquad \overline{T} = z \mapsto z+1$$

gilt dann analog

$$\overline{S}^2 = \overline{R}^3 = \overline{I},\ \overline{R} = \overline{ST}$$

und

$$\overline{\Gamma} = < \overline{R}, \overline{S}, \overline{T} > \ .$$

Offensichtlich genügen bereits jeweils zwei der drei Elemente um Γ bzw. $\overline{\Gamma}$ zu erzeugen, also

$$\Gamma = < S, T > \qquad \text{bzw.} \qquad \overline{\Gamma} = < \overline{S}, \overline{T} >$$

was für rechnerische Zwecke am günstigsten ist, oder

$$\Gamma = < R, S > \qquad \text{bzw.} \qquad \overline{\Gamma} = < \overline{R}, \overline{S} >$$

was die gruppentheoretische Struktur aufdeckt:

Satz 2 $\overline{\Gamma}$*ist das freie Produkt einer zyklischen Gruppe der Ordnung 2 und einer zyklischen Gruppe der Ordnung 3*

$$\overline{\Gamma} \cong Z_2 * Z_3 \ .$$

1.3 Die Operation auf der oberen Halbebene

Wir bezeichnen mit $\mathbb{H}$ die obere Halbebene:

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

und mit $\mathbb{H}^*$ die durch Hinzunahme der rationalen Punkte einschließlich ∞ erweiterte obere Halbebene:

$$\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}\ .$$

Dann operiert Γ auf $\mathbb{H}^*$ gerade durch die gebrochen-linearen Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} \Gamma \times \mathbb{H}^* & \to & \mathbb{H}^* \\ (A, z) & \mapsto & Az = \overline{A}(z) \end{array}$$

denn es ist

$$\mathrm{Im}(Az) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

und daher

$$\begin{array}{rcl} z \in \mathbb{H} & \Longrightarrow & Az \in \mathbb{H} \\ z \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\} & \Longrightarrow & Az \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}\ . \end{array}$$

$\mathbb{H}^*$ ist also gegenüber $\mathbb{H}$ gerade um eine Bahn erweitert. Warum das gemacht wird, werden wir in den nächsten beiden Abschnitten sehen. Analog zu Γ operiert auch $\overline{\Gamma}$ auf $\mathbb{H}^*$ und wir erhalten genau die gleichen Bahnen, sodaß wir beide Operationen weitgehend identifizieren können.

Zwei Punkte $z, z' \in \mathbb{H}^*$, die in der gleichen Bahn unter dieser Operation liegen, d.h. $z = Az'$ mit $A \in \Gamma$ nennen wir äquivalent (unter Γ) und schreiben

$$z \overset{(\Gamma)}{\sim} z'\ .$$

1.4 Der Fundamentalbereich

[BS] S.16ff

Nachdem wir im letzten Abschnitt gesehen haben, daß Γ bzw. $\overline{\Gamma}$ auf $\mathbb{H}^*$ operiert, ist es von Interesse, ein Vertretersystem für die Bahnen (unter dieser Operation) in vernünftiger geometrischer Form zu finden.

Definition 3 . *Eine Menge $\mathcal{F} \subset \mathbb{H}^*$ heißt „Fundamentalbereich“ (für Γ), wenn sie von jeder Bahn genau einen Vertreter enthält und wenn*

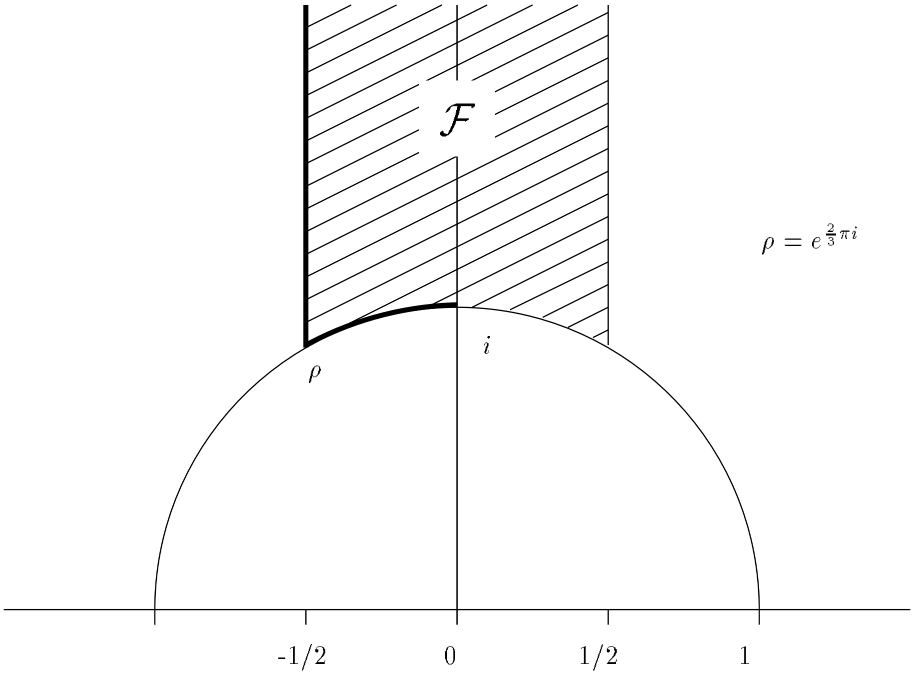
$$\begin{array}{rl} & \tau \in \mathcal{F} \textit{ und } A\tau \in \mathcal{F}, \qquad \overline{I} \neq \overline{A} \in \overline{\Gamma} \\ \Longrightarrow & \tau \in \partial\mathcal{F} \qquad (\partial\mathcal{F} = \textit{Rand von } \mathcal{F})\ . \end{array}$$

Die zweite Bedingung sorgt dafür, daß etwaige Fixpunkte auf dem Rand liegen.

Satz 3 *Die Menge*

$$\mathcal{F} = \{z \in \mathbb{H}^*;\ -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(z) < \frac{1}{2},\ |z| \geq 1,\ |z| = 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq 0\} \cup \{i\infty\}$$

ist ein Fundamentalbereich für Γ.



Wir verwenden ab jetzt das Symbol i∞ statt ∞ um auszudrücken, daß der Realteil von z bei Grenzbetrachtungen $|z| \to \infty$ in $\mathcal{F}$ beschränkt bleibt.

1.5 Hyperbolische Geometrie

Veranschaulichung und bessere Verständlichkeit erzielt man, wenn man die Betrachtungsweise der hyperbolischen Geometrie heranzieht. Diese entsteht ursprünglich auf einer Fläche mit negativer Krümmung, läßt sich jedoch auf die obere Halbebene $\mathbb{H}$ übertragen.
In diesem Rahmen bezeichnet $\mathbb{H}$ die hyperbolische Ebene, die aus hyperbolischen Punkten besteht. Die hyperbolischen Geraden (h-Geraden) sind die Orthogonalkreise von $\mathbb{R}$, soweit sie zu $\mathbb{H}$ gehören. Diese werden durch gebrochen-rationale Transformationen der Gruppe $PGL_2^+(\mathbb{R})$:

$$z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R},\ \alpha\delta - \beta\gamma > 0$$

aufeinander abgebildet, sodaß wir sie als hyperbolische Bewegungen auffassen können.
Die Schnittpunkte eines Orthogonalkreises von $\mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}$ heißen die Fernpunkte der zugehörigen h-Geraden.
Der hyperbolische Abstand zweier Punkte ist gegeben durch den Logarithmus ihres Doppelverhältnisses mit den Fernpunkten der von ihnen (eindeutig) bestimmten h-Verbindungsgeraden. Dadurch wird $\mathbb{H}$ mit einer Metrik versehen.

In dieser Bezeichnungsweise ist $\mathcal{F}$ gerade ein Viereck mit den Ecken: $i\infty, \rho, i, -\overline{\rho}$ und dazugehörigen Innenwinkeln: $0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{\pi}{3}$.

Analog dazu zerfällt $\mathcal{F}$ in zwei Dreiecke:

$\mathcal{F}_+$ ist abgeschlossen und hat die Ecken $i\infty, \rho, i$
$\mathcal{F}_-$ ist offen und hat die Ecken $i\infty, i, -\overline{\rho}$

Man nennt $\mathcal{F}$ ein Modulviereck, analog $\mathcal{F}_+$ und $\mathcal{F}_-$ Moduldreiecke.

1.6 Bahnen und Fixgruppen

[S] S.7ff

Zuerst untersuchen wir die Fixgruppen $\overline{\Gamma}_z$ der Punkte $z \in \mathbb{H}^*$. Wegen

$$\overline{\Gamma}_{Az} = \overline{A}\,\overline{\Gamma}_z\overline{A}^{-1}$$

genügt es die Fixgruppen der $z \in \mathcal{F}$ zu bestimmen.

Sei $z \in \mathcal{F}$ Fixpunkt, d.h. $z = Az$ mit einem $A \in \Gamma$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq \pm I$:

$$\begin{array}{rcl}
c = 0: & \Longrightarrow & a = d = \pm 1,\ o.B.d.A. = +1 \\
 & \Longrightarrow & z = i\infty \text{ und } A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ b \in \mathbb{Z} \\
c \neq 0: & & o.B.d.A.\ \ c > 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
z = \dfrac{az+b}{cz+d} & \Longleftrightarrow & cz^2 + (d-a)z + b = 0 \\
 & \Longleftrightarrow & z_{1/2} = \dfrac{a-d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c},\ bc = ad - 1 \\
 & \Longleftrightarrow & z_{1/2} = \dfrac{a-d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c} \\
|a+d| = 0:\ z \in \mathcal{F} & \Longrightarrow & c = 1,\ a = d = 0 \\
 & \Longrightarrow & z = i,\ A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
|a+d| = 1:\ z \in \mathcal{F} & \Longrightarrow & c = 1,\ a = -1,\ d = 0,\ \text{oder } a = 0,\ d = 1 \\
 & \Longrightarrow & z = \rho,\ A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
|a+d| = 2:\ z \in \mathcal{F} & \Longrightarrow & W!!
\end{array}$$

Wir halten die Ergebnisse fest:

Satz 4 *Ein Punkt $z \in \mathcal{F}$, der von den Ecken verschieden ist, hat nur die triviale Fixgruppe $\overline{\Gamma}_z = \{\overline{I}\}$, für die Ecken gilt:*

$$\begin{aligned}
\overline{\Gamma}_i &= <\overline{S};\ \overline{S}^2 = \overline{I}>, \\
\overline{\Gamma}_\rho &= <\overline{R};\ \overline{R}^3 = \overline{I}>, \\
\overline{\Gamma}_{i\infty} &= <\overline{T}>.
\end{aligned}$$

Satz 5 (Korollar) *Sei $z \in \mathbb{H}^*$, dann gilt*

$$\begin{array}{rcl}
z \sim i & \Longrightarrow & |\overline{\Gamma}_z| = 2 \\
z \sim \rho & \Longrightarrow & |\overline{\Gamma}_z| = 3 \\
z \sim i\infty & \Longrightarrow & |\overline{\Gamma}_z| = \infty \\
sonst & \Longrightarrow & |\overline{\Gamma}_z| = 1
\end{array}$$

und wenn $z' \in \mathcal{F}$, $z' \sim z$, d.h. $z = Az'$, so ist $\overline{\Gamma}_z = \overline{A}\,\overline{\Gamma}_{z'}\overline{A}^{-1}$

Umgekehrt können wir festhalten:

Satz 6 *Ist* $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma,\ s = \mathrm{Spur}(A)$*, so gilt*

$$\begin{array}{llll} |s| = 0 & \Longleftrightarrow & \overline{A} \textit{ hat genau einen Fixpunkt } z \sim i & \textit{(elliptischer Fall)} \\ |s| = 1 & \Longleftrightarrow & \overline{A} \textit{ hat genau einen Fixpunkt } z \sim \rho & \textit{(elliptischer Fall)} \\ |s| = 2 & \Longleftrightarrow & \overline{A} \textit{ hat genau einen Fixpunkt } z \sim i\infty & \textit{(parabolischer Fall)} \\ |s| > 2 & \Longleftrightarrow & \overline{A} \textit{ hat keinen Fixpunkt} & \textit{(hyperbolischer Fall)} \\ \textit{in } \mathbb{H}^* . & & & \end{array}$$

Die Bahnen der „interessanten“Punkte $\rho,\ i,\ i\infty$ lassen sich explizit angeben:

Satz 7

$$\begin{aligned} \mathit{Bahn}(i) &= \left\{ \frac{i-u}{v};\ u^2+1 \equiv 0 \bmod v,\ v>0,\ u,v \in \mathbb{Z} \right\} \\ \mathit{Bahn}(\rho) &= \left\{ \frac{\rho-u}{v};\ u^2+u+1 \equiv 0 \bmod v,\ v>0,\ u,v \in \mathbb{Z} \right\} \\ \mathit{Bahn}(i\infty) &= \mathbb{Q} \cup \{i\infty\} . \end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \text{Sei } z \in \mathrm{Bahn}(i) \quad &\Longrightarrow \quad z = \frac{ai+b}{ci+d} = \frac{i+ac+bd}{c^2+d^2}, \qquad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma \\ &\Longrightarrow \quad (ac+bd)^2+1 = (ac+bd)^2+(ac-bd)^2 \\ &\qquad\qquad = (a^2+b^2)(c^2+d^2) \\ &\qquad\qquad \equiv 0 \bmod (c^2+d^2) . \end{aligned}$$

Sei $c > 0,\ d^2+1 \equiv 0 \bmod c$

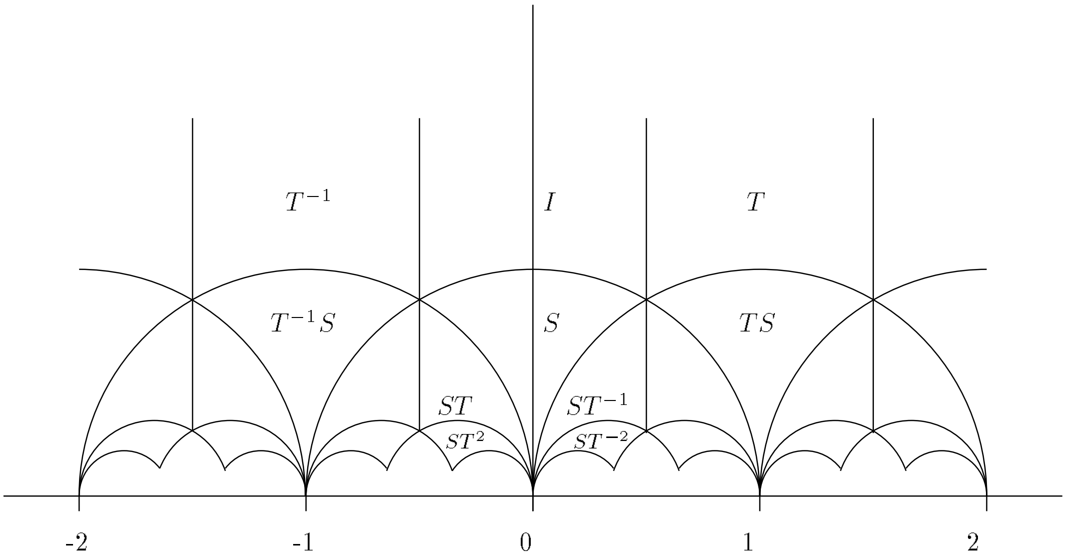
$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & A = \begin{pmatrix} -d & -\frac{d^2+1}{c} \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \\ & \text{hat Fixpunkt } \frac{i-d}{c} \text{ und } \mathrm{Spur}(A) = 0 \\ \overset{\text{Satz 6}}{\Longrightarrow} \quad & \frac{i-d}{c} \sim i . \end{aligned}$$

Bahn(ρ) läuft analog, Bahn($i\infty$) ist klar. ■

1.7 Die Modulteilung der oberen Halbebene

Mit$\mathcal{F}$ ist natürlich auch $\overline{A}(\mathcal{F})$ Modulviereck und Fundamentalbereich (für $A \in \Gamma$).

Satz 8 *Die* $\overline{A}(\mathcal{F})$ *mit* $A \in \Gamma$ *bilden eine lückenlose und (abgesehen von den Bahnen von* $i, \rho, i\infty$*) einfache Überdeckung von* $\mathbb{H}^*$.



Diese Überdeckung nennt man die *„Modulteilung der oberen Halbebene"*. Hier ist jetzt deutlich zu sehen, daß die Hinzunahme der Punkte $\mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ gerade die Kompaktheit der einzelnen Modulvierecke sichert.

Die Figur stellt ein hyperbolisches Gitter dar: sie ist invariant unter einer diskreten Untergruppe (nämlich Γ) der Bewegungsgruppe von $\mathbb{H}$ (siehe 1.5).

Um für beliebiges $A \in \Gamma$ das Bild $\overline{A}(\mathcal{F})$ zu bestimmen, kann man sich folgender Formeln bedienen (die einfach zu verifizieren sind):

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccc}
 & \overline{A} & \\
h(-\tfrac{1}{2}, \infty) & \longrightarrow & h(\dfrac{a-2b}{c-2d}, \dfrac{a}{c}) \\
h(\tfrac{1}{2}, \infty) & \longrightarrow & h(\dfrac{a+2b}{c+2d}, \dfrac{a}{c}) \\
h(0, \infty) & \longrightarrow & h(\dfrac{b}{d}, \dfrac{a}{c}) \\
h(-1, 1) & \longrightarrow & h(\dfrac{a+b}{c+d}, \dfrac{a-b}{c-d})
\end{array}$$

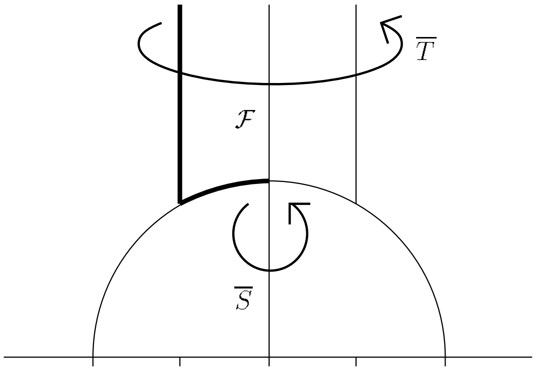
Falls ein Nenner $= 0$ wird, ersetzen wir den Bruch durch ∞ (in diesem Fall ist die h-Gerade eine Halbgerade im üblichen Sinne).

Wenn ein Fundamentalbereich $\mathcal{F}'$ gegeben ist, so gibt es zu jedem Nachbarmodulviereck $\mathcal{M}$ ein $A \in \Gamma$ mit $\overline{A}(\mathcal{F}') = \mathcal{M}$. Da diese Abbildungen die Ränder von $\mathcal{F}$ aufeinander abbilden, nennt man sie *„Randsubstitutionen "* und da diese $\mathcal{F}'$ auf jedes Nachbarviereck abbilden, erzeugen sie $\overline{\Gamma}$ (siehe 3.2. Satz 15).

Satz 9 *Die Randsubstitutionen erzeugen* $\overline{\Gamma}$.

Wenn wir dies auf $\mathcal{F}$ anwenden, erhalten wir erneut

$$\overline{\Gamma} = < \overline{S}, \overline{T} > \quad .$$



Es ist jedoch nicht so, daß man zu jedem minimalen Erzeugendensystem einen Fundamentalbereich finden kann, der ebendieses als System von Randsubstitutionen hat, wie das Beispiel $\overline{\Gamma} = < \overline{R}, \overline{S} >$ zeigt.

1.8 Der Bahnenraum als Riemannsche Fläche [S] S.89ff

Wir bilden den Quotientenraum

$$\mathcal{R} = \mathbb{H}^*/\overline{\Gamma}$$

der als Elemente gerade die Bahnen

$$[z] = \{Az;\ A \in \Gamma\}$$

besitzt. Die kanonische Abbildung

$$\sigma :\ z \mapsto [z]$$

macht $\mathbb{H}^*$ zu einer Überlagerung von $\mathcal{R}$.
$\mathcal{R}$ läßt sich zu einer Riemannschen Fläche machen und wir erhalten eine Veranschaulichung von $\mathcal{R}$, indem wir äquivalente Randpunkte miteinander identifizieren:
Wir kleben Ränder, die durch Randsubstitutionen aufeinander abgebildet werden, zusammen und erhalten so eine geschlossene Fläche, die man als hyperbolischen Polyeder ansehen kann. Aus topologischer Sicht ist dieses Gebilde eine Kugel.
Die analytische Struktur von $\mathcal{R}$ wird in dem Abschnitt über Modulfunktionen erörtert.

2 Modulfunktionen

2.1 Definition

Definition 4 *Eine Abbildung* $f:\ \mathbb{H}^* \to \hat{\mathbb{C}}$ *heißt „Modulfunktion (für* Γ*)“, wenn gilt:*

i) *f ist meromorph in* $\mathbb{H}$,

ii) $f(A\tau) = f(\tau) \qquad$ *für* $A \in \Gamma,\ \tau \in \mathbb{H}^*$,

iii) *Es gibt ein* $a > 0$, *sodaß für* $\mathrm{Im}(\tau) > a,\ f(\tau)$ *eine Entwicklung hat* :

$$f(\tau) = \sum_{\nu \geq h} a_\nu e^{2\pi i \nu \tau} \qquad , h \in \mathbb{Z}, a_h \neq 0$$

$$\begin{aligned} h > 0 &\implies f(i\infty) = 0 \\ h = 0 &\implies f(i\infty) = a_0 \\ h < 0 &\implies f(i\infty) = \infty \ . \end{aligned}$$

Die Menge aller Modulfunktionen (für Γ) bezeichnen wir mit K_Γ.

Die Bedingung iii) sichert gerade die Meromorphie in den Punkten $\mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$.
Da eine Modulfunktion auf den Bahnen $\{A\tau;\ A \in \Gamma\}$ konstant ist, kann man sie als Funktion auf dem Quotientenraum $\mathcal{R} = \mathbb{H}^*/\Gamma$ deuten, den wir in 1.8 veranschaulicht haben.
Modulfunktionen sind also gemäß *ii)* die analytischen „absoluten Invarianten“der Modulgruppe. Zieht man relative Invarianten heran, ersetzt man genauer *ii)* durch die Forderung

$$ii)' \qquad f(A\tau) = \zeta_A (c\tau + d)^k f(\tau)$$

mit einer Einheitswurzel ζ_A unter Beibehaltung der anderen Forderungen, so kommt man zum allgemeineren Begriff der „Modulform vom Gewicht $-k$“, den wir gelegentlich zu verwenden haben.

2.2 Reihenentwicklungen [S] S.26ff

Wenn wir eine Modulfunktion f um einen Punkt $\alpha \in \hat{\mathbb{C}}$ entwickeln wollen, können wir als ortsuniformisierende Variable t_α jede Funktion wählen, die eine Umgebung von α auf eine Kreisscheibe um 0 abbildet.
Meistens nimmt man

$$t_\alpha = t_\alpha(\tau) = \tau - \alpha \ .$$

in unserem Fall ist es aus rechentechnischen Gründen günstiger

$$t_\alpha = t_\alpha(\tau) = \frac{\tau - \alpha}{\tau - \overline{\alpha}}$$

zu wählen. Wir entwickeln f in t_α für $\alpha \in \mathcal{F}$:

$\alpha \neq i, \rho, i\infty$:

$$f(\tau) = \sum_{\nu \geq k} a_\nu t_\alpha(\tau)^\nu, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$\alpha = \rho$: Es ist

$$t_\rho(R\tau) = \overline{\rho} t_\rho(\tau), \qquad R = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \sum_{\nu \geq l} b_\nu t_\rho(\tau)^\nu \\ f(R\tau) &= \sum_{\nu \geq l} b_\nu \overline{\rho}^\nu t_\rho(\tau)^\nu \ . \end{aligned}$$

Wegen $f(\tau) = f(R\tau)$ folgt

$$b_\nu = 0 \qquad \text{für } \nu \not\equiv 0 \bmod 3$$

und wir erhalten eine Entwicklung in $t_\rho(\tau)^3$:

$$f(\tau) = \sum_{\nu \geq l} b_\nu t_\rho(\tau)^{3\nu} \ .$$

$\alpha = i$: Analog zu $\alpha = \rho$ berechnen wir

$$t_i(S\tau) = -t_i(\tau), \qquad R = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

und damit

$$f(\tau) = \sum_{\nu \geq m} c_\nu t_\rho(\tau)^{2\nu} \ .$$

$\alpha = i\infty$:
Als Ortsuniformisierende wählen wir $t_{i\infty}(\tau) = e^{2\pi i \tau}$, da diese eine Umgebung von $i\infty$ (nämlich $\{z;\ |z| > a\}$) auf eine Kreisscheibe um 0 abbildet. Als Entwicklung in $t_{i\infty}$ erhalten wir gerade die aus der Definition:

$$f(\tau) = \sum_{\nu \geq n} d_\nu t_{i\infty}(\tau)^\nu$$

Warum erhalten wir im Fall $\alpha = \rho$ (bzw. $\alpha = i$) eine Entwicklung in der Variablen t_ρ^3 (bzw. t_i^2) ?
Der Punkt ρ (bzw. i) besitzt in $\mathcal{F}$ nur eine Drittelumgebung (bzw. halbe Umgebung):

$$\begin{array}{rl} & \rho \text{ mit Innenwinkel } \dfrac{\pi}{3} \\ + & -\overline{\rho} \text{ mit Innenwinkel } \dfrac{\pi}{3} \qquad = \dfrac{2}{3}\pi \\ & (\text{bzw.} i \text{ mit Innenwinkel } \pi) \end{array}$$

sodaß t_ρ^3 (bzw. t_i^2) diese gerade auf eine volle Kreisscheibe um 0 abbildet und somit die „richtige "Ortsuniformisierende ist.

Wir definieren neu:

Definition 5 *Wir setzen*

$$t_{i\infty}(\tau) = e^{2\pi i \tau}, \ t_\rho(\tau) = \left(\frac{\tau - \rho}{\tau - \overline{\rho}}\right)^3, \ t_i(\tau) = \left(\frac{\tau - i}{\tau + i}\right)^2,$$
$$t_\alpha(\tau) = \left(\frac{\tau - \alpha}{\tau - \overline{\alpha}}\right), \ \alpha \neq i\infty, \rho, i$$

und nennen t_β die ortsuniformisierende Variable für $\beta \in \mathcal{F}$.

Eine der wichtigsten Eigenschaften von Modulfunktionen formuliert folgender Satz:

Satz 10 *Jede nichtkonstante Modulfunktion nimmt in $\mathcal{F}$ nach Vielfachheiten gezählt (in den Ortsuniformisierenden!) jeden Wert $\in \hat{\mathbb{C}}$ gleich oft an.*

Satz 11 (Korollar) *Jede nichtkonstante Modulfunktion hat in $\mathcal{F}$ genauso viele Nullstellen wie Pole (nach Vielfachheiten gezählt).*

Diese gemeinsame Vielfachheit, mit die Werte $\in \hat{\mathbb{C}}$ in $\mathcal{F}$ angenommen werden, nennen wir *„(globale) Ordnung "* von f und schreiben $\operatorname{ord}(f)$.

2.3 Die absolute Invariante

[S] S.35ff

Jetzt wollen wir die Struktur von K_Γ bestimmen. Wir zeigen:

Satz 12 *Wenn es in K_Γ eine Modulfunktion j gibt mit* ord*(j)=1, so ist jede Modulfunktion eine rationale Funktion von j und somit*

$$K_\Gamma = \mathbb{C}(j)$$

der von j über $\mathbb{C}$ erzeugte Körper.

Beweis:
Sei $f \in K_\Gamma$ mit inäquivalenten Nullstellen α_μ der Ordnung r_μ, $\mu = 1 \ldots m$ und inäquivalenten Polen β_ν der Ordnung s_ν, $\nu = 1 \ldots n$, sodaß

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = \beta_1 + \ldots + \beta_n \ .$$

Wir setzen

$$g(\tau) = \frac{\prod\limits_{\mu=1}^{m} (j(\tau) - j(\alpha_\mu))^{r_\mu}}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} (j(\tau) - j(\alpha_\nu))^{s_\nu}}$$

wobei wir $j(\tau) - j(\alpha_\mu)$ bzw. $j(\tau) - j(\beta_\nu) \ = 1$ setzen, wenn $\alpha_\mu = i\infty$ bzw. $\beta_\nu = i\infty$

$$\Longrightarrow \quad \frac{f}{g} \text{ hat keine Nullstellen und Pole } \mathit{in}\ \mathcal{F} \text{ , ist also nach Satz 10 konstant.}$$

$$\Longrightarrow \quad f = cg, \qquad c \in \mathbb{C} \qquad \blacksquare$$

Eine Modulfunktion kann man sich elementar beschaffen (siehe [S] S.35ff) oder als Quotient zweier Modulformen desselben Gewichts, was ich aber nicht näher ausführen möchte.

Eine solche Modulfunktion der Ordnung 1 ist bis auf eine gebrochen-lineare Transformation bestimmt. Wir zeichnen unter diesen eine aus, indem wir festlegen:

$$J(i\infty) = \infty, \ J(\rho) = 0, \ J(i) = 1728$$

und nennen J die *„absolute Invariante“*
Diese Festlegung ist so gewählt, daß J die Entwicklung hat

$$J(\tau) = \sum_{\nu \geq -1} a_\nu e^{2\pi i \nu \tau} \qquad \text{mit } a_{-1} = 1$$

oder in der üblichen Schreibweise

$$J = J(\tau) = \frac{1}{q} + \sum_{\nu \geq 0} a_\nu q^\nu \qquad q = t_{i\infty}(\tau) = e^{2\pi i \tau}$$

und außerdem für die Koeffizienten gilt ([S] S.56):

Satz 13 *Die Koeffizienten a_ν in der normierten q-Entwicklung (erster Koeffizient =1) von J sind natürliche Zahlen:*

$$a_\nu \in \mathbb{N} \ \mathit{für} \ \ \nu \geq -1 \ .$$

Hier eine Liste der ersten 20 Koeffizienten:

n	a_n	n	a_n
0	744	10	22567393309593600
1	196884	11	146211911499519294
2	21493760	12	874313719685775360
3	864299970	13	4872010111798142520
4	20245856256	14	25497827389410525184
5	333202640600	15	126142916465781843075
6	4252023300096	16	593121772421445058560
7	44656994071935	17	2662842413150775245160
8	401490886656000	18	11459912788444786513920
9	3176440229784420	19	47438786801234168813250

Es fällt auf, daß die Koeffizienten sehr rasch wachsen, außerdem haben sie unverhältnismäßig viele kleine Primfaktoren. Weitere Besonderheiten sind unter dem Namen „moonshine “ bekannt (siehe Einleitung).

Eine Aussage über das Verhalten von J auf $\mathcal{F}$ macht folgender Satz:

Satz 14 *J bildet den Rand von $\mathcal{F}_+$, also*

$$\begin{aligned} & \{-\frac{1}{2}+it;\ \infty > t \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}\} \cup \{t + i\sqrt{1-t^2};\ \frac{1}{2} \geq t \geq 0\} \\ \cup\ & \{it;\ 1 \leq t < \infty\} \end{aligned}$$

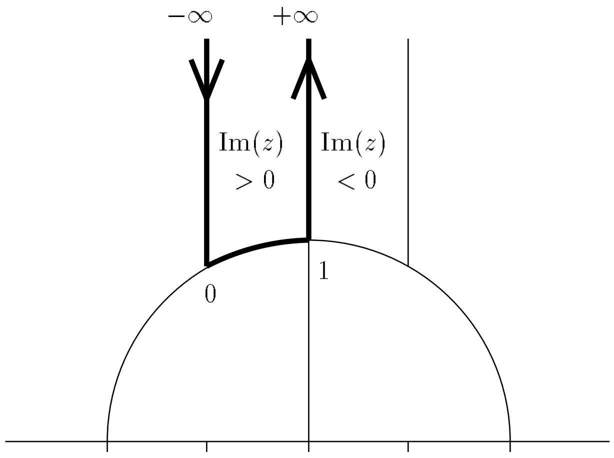
streng monoton steigend auf $\mathbb{R}$ ab.
Dementsprechend ist das Bild des linken Teildreiecks von $\mathcal{F}$ die abgeschlossene obere Halbebene:

$$J(\mathcal{F}_+) = \{j \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(j) \geq 0\}$$

und das Bild des rechten Teildreiecks von $\mathcal{F}$ die untere Halbebene:

$$J(\mathcal{F}_-) = \{j \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(j) < 0\}\ .$$

Funktionswerte von J:



Beweis: Betrachte $q = e^{2\pi i\tau}$

$$\begin{aligned}
\tau = -\frac{1}{2} + it \quad &\Longrightarrow \quad e^{2\pi i(-\frac{1}{2}+it)} = -e^{2\pi t} \ \in \mathbb{R} \\
\tau = it \quad &\Longrightarrow \quad e^{2\pi i(it)} = e^{-2\pi t} \ \in \mathbb{R} \\
\tau = t + i\sqrt{1-t^2};\ \frac{1}{2} \geq t \geq 0 \quad &\Longrightarrow \quad \overline{e^{2\pi i\tau}} = e^{2\pi i(-\overline{\tau})} = e^{2\pi i(S\tau)} \\
&\Longrightarrow \quad \overline{J(\tau)} = J(\tau) \text{ also } J(\tau) \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Wegen $J(\rho) = 0,\ J(i) = 1728$ folgt aus Stetigkeitsgründen die Behauptung ■

3 Untergruppen der Modulgruppe

3.1 Allgemeines

[S] S.71ff

Wenn wir statt Γ eine Untergruppe Γ_1 von Γ betrachten, können wir die gleichen Überlegungen und Konstruktionen anstellen wie in Abschnitt 1. Daher werde ich dort wo Analogie herrscht nicht mehr so ausführlich sein.

Der Einfachheit wegen, und da es für unsere Zwecke ausreicht, beschränken wir uns auf Untergruppen Γ_1 von endlichem Index $(\Gamma : \Gamma_1) < \infty$ und mit $-I \in \Gamma_1$.

Wir haben wieder den Homomorphismus

$$\begin{aligned}
\phi \ : \ &\Gamma_1 \to \overline{\Gamma}_1 \\
&A \mapsto \overline{A}
\end{aligned}$$

auf die Gruppe $\overline{\Gamma}_1$ der zugehörigen inhomogenen Modulsubstitutionen und die Isomorphie

$$\overline{\Gamma}_1 \cong \Gamma_1/\{\pm I\} \ .$$

Wir betrachten die Zerlegung in Restklassen

$$\begin{aligned}
&\Gamma = \bigcup_{\nu=1}^{\mu} \Gamma_1 S_\nu, \qquad \mu = (\Gamma : \Gamma_1),\ S_\nu \in \Gamma \\
\Longrightarrow \quad &\overline{\Gamma} = \bigcup_{\nu=1}^{\mu} \overline{\Gamma}_1 \overline{S_\nu} \\
\Longrightarrow \quad &(\Gamma : \Gamma_1) = \mu = (\overline{\Gamma} : \overline{\Gamma}_1) \ .
\end{aligned}$$

Analog zu 1.3 operieren Γ_1 bzw. $\overline{\Gamma}_1$ auf $\mathbb{H}^*$ durch die inhomogenen Modulsubstitutionen $\overline{A} \in \overline{\Gamma}_1$. Zwei Punkte $z, z' \in \mathbb{H}^*$, die in der gleichen Bahn unter dieser Operation liegen, heißen äquivalent unter Γ_1 und wir schreiben:

$$z \overset{\Gamma_1}{\sim} z' \ .$$

Ein Punkt $z \in \mathbb{H}^*$ heißt Fixpunkt für Γ_1, wenn

$$z = Az \qquad \text{mit } A \in \Gamma_1 \ .$$

3.2 Fundamentalbereich

[S] S.79ff

Wie für Γ, so läßt sich auch für Γ_1 ein vernünftiges Vertretersystem finden.

Definition 6 *$\mathcal{F}_1 \subset \mathbb{H}^*$ heißt Fundamentalbereich für Γ_1, wenn*

i) *$\mathcal{F}_1$ enthält genau einen Vertreter aus jeder Bahn,*
ii) *z Fixpunkt von $\Gamma_1 \Rightarrow z \in \partial\mathcal{F}_1$,*
iii) *$\mathcal{F}_1$ ist zusammenhängend*
(und zwar so, daß jedes Modulviereck in $\mathcal{F}_1$
an ein anderes in $\mathcal{F}_1$ mit mindestens einer
Seite grenzt).

Satz 15 *Es läßt sich stets ein Fundamentalbereich finden und dieser besteht aus $\mu = (\Gamma : \Gamma_1)$ Modulvierecken bzw. aus 2μ Moduldreiecken.*

Beweis:
Wir gehen von einem beliebigem Modulviereck $\mathcal{M}$ aus und fügen zu unserem Bereich $\mathcal{B}$ immer ein benachbartes Modulviereck hinzu, welches zu allen in $\mathcal{B}$ inäquivalent ist.
Wenn das nicht mehr geht und $\mathcal{B}$ wäre kein Fundamentalbereich, so gäbe es ein Modulviereck $\mathcal{N}$, das zu allen in $\mathcal{B}$ inäquivalent ist
Wenn wir uns jetzt von $\mathcal{B}$ auf $\mathcal{N}$ zubewegen, ist das erste Modulviereck, dem wir begegnen, welches nicht äquivalent zu einem in $\mathcal{B}$ ist, äquivalent zu einem Modulviereck, das an $\mathcal{B}$ grenzt, was ein Widerspruch ist.

Da die Abbildungen $\overline{A}$, die $\mathcal{M}$ auf die einzelnen Modulvierecke aus $\mathcal{B}$ abbilden, ein vollständiges Restsystem mod Γ_1 bilden, müssen es μ Stück sein. ■

Mit der gleichen Argumentation wie bei Γ erhalten wir:

Satz 16 *Die Randsubstitutionen von $\mathcal{F}_1$ erzeugen Γ_1.*

Der Quotientenraum $\mathbb{H}^*/\Gamma$ ist wieder eine Riemannsche Fläche, die man sich veranschaulichen kann, indem man $\mathcal{F}_1$ vermöge seiner Randsubstitutionen zu einer geschlossenen Fläche zusammenklebt.

3.3 Fixpunkte

Als Fixpunkte für $\Gamma_1 \leq \Gamma$ kommen natürlich nur parabolische Punkte s ($s \overset{\Gamma}{\sim} i\infty$) oder elliptische Punkte τ_i, τ_ρ ($\tau_i \overset{\Gamma}{\sim} i, \tau_\rho \overset{\Gamma}{\sim} \rho$) infrage.
Es genügt, solche in einem Fundamentalbereich $\mathcal{F}_1$ zu betrachten und wenn ein solcher gegeben ist, kann man einem Punkt ansehen, ob er Fixpunkt ist oder nicht.

Satz 17

i) Ein Punkt τ_ρ (bzw. τ_i)$\in \mathcal{F}_1$ ist Fixpunkt
$\Longleftrightarrow$ *An τ_ρ (bzw. τ_i) und an einen eventuellen zu τ_ρ (bzw. τ_i) äquivalenten Randpunkt grenzen zusammen(!) 2 Modulvierecke bzw. 4 Moduldreiecke.*

ii) Ein Punkt $s \in \mathcal{F}_1$ heißt „Spitze“ ($s \in \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$) und ist immer Fixpunkt von Γ_1.
Wenn $A \in \Gamma$ so ist, daß

$$s = A(i\infty)$$

dann wird die Fixgruppe $(\Gamma_1)_s$ erzeugt von $AT^\kappa A^{-1}$ mit einem $\kappa \in \mathbb{N}$:

$$(\Gamma_1)_s =< AT^{\kappa(s)}A^{-1} >$$

und man sagt: $\mathcal{F}_1$ hat die Spitze s der „Fächerweite “$\kappa(s)$.

Man nennt auch Punkte $s \in \partial\mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}_1$ Spitzen. Die Modulvierecke, die an eine Spitze s grenzen, bilden einen Fächer. Wenn man die Anzahlen solcher Modulvierecke für alle Spitzen von $\mathcal{F}_1$, die zu s äquivalent sind, addiert, erhält man $\kappa = \kappa(s)$ die Fächerweite (oder einfach Weite) von s.

Wenn τ_ρ (bzw. τ_i) $\in \mathcal{F}_1$ kein Fixpunkt von Γ_1 ist, so grenzen an τ_ρ (bzw. τ_i) und an einem eventuellen zu τ_ρ (bzw. τ_i) äquivalenten Randpunkt von $\mathcal{F}_1$ zusammen(!) 6 (bzw. 4) Modulvierecke oder 12 (bzw. 8) Moduldreiecke.

3.4 Geschlecht

[S] S.93ff

Zuerst müssen wir einige topologische Begriffe einführen.
Die Riemannsche Fläche $\mathbb{H}^*/\Gamma_1$ ist kompakt und (wie jede Riemannsche Fläche) orientierbar.

Für eine solche Fläche $\mathcal{G}$ definieren wir:

Bogen	– homeomorphes Bild von $[0,1] \subset \mathbb{R}$ in $\mathcal{G}$
Kurve	– endliche Aneinanderreihung von Bögen, sodaß der Endpunkt des einen der Anfangspunkt des nächsten ist
geschlossene Kurve	– Kurve bei der Anfangspunkt=Endpunkt ist
Polygon	– homeomorphes Bild einer geschlossenen Kreisscheibe in $\mathcal{G}$
Polygonzerlegung von $\mathcal{G}$ (PZ)	– ein endliches System $\mathcal{L}$ von Kurven in $\mathcal{G}$, sodaß die abgeschlossene Hülle der Komponenten des Komplements von $\mathcal{L}$ Polygone sind. Zwei solche Polygone haben als Schnitt die leere Menge, einen Punkt oder eine Kante.

e = Anzahl der Ecken einer PZ,
k = Anzahl der Kanten einer PZ,
f = Anzahl der Flächen (Polygone) einer PZ.

Satz 18 (Euler's Satz über Polyeder) *Für jede Polygonzerlegung von $\mathcal{G}$ hat e-k+f den gleichen Wert.*
Die Zahl $1-\frac{e-k+f}{2}$ ist die maximale Anzahl von geschlossenen Kurven in $\mathcal{G}$, die sich nicht schneiden und $\mathcal{G}$ nicht zerlegen.

Definition 7 *Die topologische Invariante*

$$g = 1 - \frac{e-k+f}{2}$$

heißt „Geschlecht"von $\mathcal{G}$.

Der Fall $g = 0$ entspricht topologisch einer Kugel: jede geschlossene Kurve zerlegt $\mathcal{G}$.
Wir können dies jetzt auf $\mathbb{H}^*/\Gamma_1$ anwenden. Die (Bahnen der) Kanten der (Bahnen der) Moduldreiecke in $\mathcal{F}_1$ bilden offensichtlich eine Polynomzerlegung von $\mathbb{H}^*/\Gamma_1$.
Wenn $E_1, \ldots, E_\nu$ die Ecken dieser Polynomzerlegung sind und an E_i jeweils $2\kappa_i$ Moduldreiecke grenzen, erhalten wir:

$$f = 2\mu, \quad k = \sum_{i=1}^{\nu} \kappa_i, \quad e = \nu \ .$$

Es folgt

$$g = 1 - \mu + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\nu}(\kappa_i - 1) \ .$$

Wir bezeichnen g als das Geschlecht von $\mathcal{F}_1$ oder auch als das Geschlecht von Γ_1.

Beispiel: $\Gamma_1 = \Gamma$
Hier ist

$$\mu = 1, \ k = 3, \ e = 3 \implies g = 0.$$

Jetzt wollen wir die Formel für g so verändern, daß sich g in konkreten Fällen ausrechnen läßt. Wir betrachten die Ecken E_i der Polygonzerlegung:

1.Fall: E_i ist die Bahn eines Punktes $\tau_\rho \in \mathcal{F}_1$

$$\begin{aligned} \implies \ & \kappa_i = 1 \text{ wenn } \tau_\rho \text{ Fixpunkt} \\ & (\epsilon_\rho = \text{ Anzahl dieser } E_i), \\ & \kappa_i = 3 \text{ sonst} \\ & (\alpha_\rho = \text{ Anzahl dieser } E_i). \end{aligned}$$

2.Fall: E_i ist die Bahn eines Punktes $\tau_i \in \mathcal{F}_1$

$$\begin{aligned} \implies \ & \kappa_i = 1 \text{ wenn } \tau_i \text{ Fixpunkt} \\ & (\epsilon_i = \text{ Anzahl dieser } E_i), \\ & \kappa_i = 2 \text{ sonst} \\ & (\alpha_i = \text{ Anzahl dieser } E_i). \end{aligned}$$

3.Fall: E_i ist die Bahn eines Punktes $s \in \mathcal{F}_1$

$$\begin{aligned} \implies \ & \kappa_i = \kappa(s) \\ & (\sigma_\infty = \text{Anzahl dieser } E_i). \end{aligned}$$

Es ist leicht einzusehen, daß

$$3\epsilon_\rho + \alpha_\rho = \mu, \text{ bzw. } 2\epsilon_i + \alpha_i = \mu \ .$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\nu} (\kappa_i - 1) &= \sum_{\substack{i \\ E_i = Bahn(\tau_\rho)}} (\kappa_i - 1) + \sum_{\substack{i \\ E_i = Bahn(\tau_i)}} (\kappa_i - 1) + \sum_{\substack{i \\ E_i = Bahn(s)}} (\kappa_i - 1) \\ &= 2\alpha_\rho + \alpha_i + \mu - \sigma_\infty \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} g &= 1 - \mu + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\nu} (\kappa_i - 1) \\ &= 1 - \mu + \alpha_\rho + \frac{1}{2}\alpha_i + \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\sigma_\infty \\ &= 1 + \frac{\mu}{12} - \frac{\epsilon_\rho}{3} - \frac{\epsilon_i}{4} - \frac{\sigma_\infty}{2} \ . \end{aligned}$$

Satz 19 *Das Geschlecht g einer Untergruppe $\Gamma_1 \leq \Gamma$ berechnet sich durch*

$$g = 1 + \frac{\mu}{12} - \frac{\epsilon_\rho}{3} - \frac{\epsilon_i}{4} - \frac{\sigma_\infty}{2}$$

wobei

μ = $(\Gamma : \Gamma_1)$,

ϵ_ρ = *Anzahl eines vollständigen Systems nichtäquivalenter Fixpunkte* τ_ρ *von* Γ_1,

ϵ_i = *Anzahl eines vollständigen Systems nichtäquivalenter Fixpunkte* τ_i *von* Γ_1,

σ_∞ = *Anzahl eines vollständigen Systems nichtäquivalenter Spitzen von* Γ_1.

Beispiel: $\Gamma_1 = \Gamma$
Hier ist

$$\mu = \epsilon_\rho = \epsilon_i = \sigma_\infty = 1 \Longrightarrow g = 0 \ .$$

Wir wollen die Größen $\epsilon_\rho . \epsilon_i$ noch etwas weiter betrachten. Ein Punkt $\tau_\rho = A\rho,\ A \in \mathbb{Z}$ ist Fixpunkt für Γ_1 genau dann, wenn es ein $\pm I \neq L \in \Gamma_1$ gibt mit

$$LA\rho = A\rho \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^{-1}LA\rho = \rho$$

woraus folgt

$$A^{-1}LA = \pm R^\alpha, \qquad \alpha = 1 \text{ oder } 2$$

was gleichbedeutend ist (wegen $-I \in \Gamma_1$) mit

$$AR^\alpha A^{-1} \in \Gamma_1 \ .$$

Da jedoch

$$ARA^{-1} \in \Gamma_1 \Longleftrightarrow AR^2A^{-1} \in \Gamma_1$$

erhalten wir

$$\text{Ein Punkt } A(\rho) \text{ ist Fixpunkt für } \Gamma_1 \Longleftrightarrow ARA^{-1} \in \Gamma_1 \ .$$

Wenn $A_1 = BA$ mit $B \in \Gamma_1$, so ist $A_1(\rho)$ ebenfalls Fixpunkt für Γ_1 und es gilt

$$\begin{aligned} & ARA^{-1} \in \Gamma_1 \text{ und } A_1RA^{-1} \in \Gamma_1 \\ \Longrightarrow\quad & A_1RA^{-1} = (A_1A)(ARA^{-1}) \in \Gamma_1 \\ \Longrightarrow\quad & A_1A \in \Gamma_1 \text{ bzw. } A_1 \equiv A \bmod \Gamma_1 \ . \end{aligned}$$

Äquivalente Matrizen entsprechen also äquivalenten Fixpunkten.

Die Betrachtung der Punkte τ_i verläuft analog, die Formel für σ_∞ ist offensichtlich, sodaß wir zusammenfassen:

Satz 20 *Die Zahl ϵ_ρ der nichtäquivalenten Fixpunkte unter Γ_1 ist die Anzahl der inkongruenten Lösungen A modulo Γ_1 von*

$$ARA^{-1} \in \Gamma_1.$$

Die Zahl ϵ_i ist die Anzahl der inkongruenten Lösungen A modulo Γ_1 von

$$ASA^{-1} \in \Gamma_1.$$

Die Zahl σ_∞ der Spitzen von Γ_1 berechnet sich durch

$$\sigma_\infty = \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{1}{\kappa_\nu}$$

wobei κ_ν die Fächerweite der Spitze $A_\nu(i\infty)$ ist und

$$\Gamma = \bigcup_{\nu=1}^{\mu} A_\nu \Gamma_1$$

die Zerlegung in Restklassen.

4 Modulfunktionen für Untergruppen

4.1 Definition

[S] S.104ff

Wie bisher sei $\Gamma_1 \leq \Gamma$ mit $-I \in \Gamma_1$, $(\Gamma : \Gamma_1) = \mu$.

Definition 8 *Eine Funktion f auf $\mathbb{H}^*$ heißt Modulfunktion für $\Gamma_1 \leq \Gamma$, wenn:*

i) *f ist meromorph in $\mathbb{H}$,*

ii) $f(A(\tau)) = f(\tau)$ *für* $A \in \Gamma_1,\ \tau \in \mathbb{H}^*$,

iii) *An einer Spitze $s = -\frac{d}{c}$, $(c,d) = 1$ hat f eine Entwicklung der Form*

$$f(\tau) = \sum_{\nu \geq \nu_0} c_\nu e^{\frac{2\pi i}{\kappa} A(\tau)\nu} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma,\ \kappa \in \mathbb{N}$$

für $\mathrm{Im}(\tau)$ *genügend groß.*

Die Menge aller Modulfunktionen für Γ_1 bezeichnen wir mit K_{Γ_1}.

Man kann $\kappa = \kappa(-\frac{d}{c})$ wählen (die Fächerweite von $-\frac{d}{c}$), denn damit ist

$$A^{-1}U^{\kappa}A \in \Gamma_1 \qquad \text{(Satz 17)}$$

und deshalb

$$f(A^{-1}U^{\kappa}A(\tau)) = \sum_{\nu \geq \nu_0} c_{\nu} e^{\frac{2\pi i}{\kappa} U^{\kappa}A(\tau)} = f(\tau) \ .$$

Anschaulich ist $e^{\frac{2\pi i}{\kappa(-\frac{d}{c})} A(\tau)}$ auch die „richtige“ Ortsuniformisierende:
$\tau \mapsto e^{2\pi i A(\tau)}$ bildet die Umgebung der Spitze $s = -\frac{d}{c}$ in einem Modulviereck auf eine Kreisscheibe um 0 ab, also bildet $\tau \mapsto e^{\frac{2\pi i}{\kappa} A(\tau)}$ die gesamte Umgebung in allen $\kappa(s)$ Modulvierecken, die an s grenzen, auf eine volle Kreisscheibe um 0 ab.
Für $s = i\infty$ gelten analoge Überlegungen.

4.2 Eigenschaften und Struktur

[S] S.105ff

Aus der Definition ergibt sich leicht

$$\begin{array}{ll} i) & K_{\Gamma_1} \text{ ist ein Körper,} \\ ii) & (\Gamma_1 : \Gamma_2) < \infty \Longrightarrow K_{\Gamma_1} \leq K_{\Gamma_2} \ . \end{array}$$

Übereinstimmend mit Modulfunktionen für Γ gilt:

Satz 21 *Jede nichtkonstante Modulfunktion für Γ_1 nimmt in $\mathcal{F}_1$ jeden Wert $\in \hat{\mathbb{C}}$ gleich oft an (gemessen in den Ortsuniformisierenden).*

Wir bezeichnen wieder mit $\operatorname{ord}(f)$ bzw. $\operatorname{ord}_{\Gamma_1}(f)$ diese gemeinsame Vielfachheit und können jetzt genauer sagen:

$$(\Gamma_1 : \Gamma_2) = \nu, \ f \in K_{\Gamma_1} \Longrightarrow \operatorname{ord}_{\Gamma_1}(f) = \nu \cdot \operatorname{ord}_{\Gamma_2}(f)$$

was leicht zu verifizieren ist, wenn man sich klarmacht, daß ein Fundamentalbereich für Γ_2 gerade aus ν Fundamentalbereichen für Γ_1 besteht (bei geeigneter Wahl).
Eine genauere Klassifikation der Körper K_{Γ_1} erlaubt uns folgender Satz

Satz 22 $(\Gamma : \Gamma_1) = \mu$

$$\Longrightarrow K_{\Gamma_1}/K_{\Gamma} \textit{ ist algebraisch vom Grad } \mu$$

Der Beweis erfordert den Satz von Riemann-Roch ([S] S.120ff).
K_{Γ_1} ist also ein algebraischer Funktionenkörper in einer Variablen mit Geschlecht g, das übereinstimmt mit dem in 3.3 eingeführten topologischen Geschlecht von Γ_1:
Die topologische Struktur von $\mathbb{H}^*/\Gamma_1$ entspricht der algebraischen Struktur von K_{Γ_1}/K_{Γ}.
Im Falle $g = 0$ läßt sich K_{Γ_1} also mit einer geeigneten Funktion f_1 ($\Leftrightarrow \operatorname{ord}_{\Gamma_1}(f_1) = 1$) direkt über $\mathbb{C}$ erzeugen:

$$K_{\Gamma_1} = \mathbb{C}(f_1)$$

5 Transformationstheorie

5.1 Bezeichnungen

Sei

$$\mathcal{M}_n = \left\{ M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix};\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z},\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 1,\ \det(M) = \alpha\delta - \beta\gamma = n \right\}\ .$$

Ein $M \in \mathcal{M}_n$ nennen wir Transformation der Ordnung n.

Definition 9 *Sei $M \in \mathcal{M}_n$, wir nennen*

$$\Gamma_M = \Gamma \cap M^{-1}\Gamma M = \{A \in \Gamma;\ MAM^{-1} \in \Gamma\}$$

eine „Transformationsgruppe der Ordnung n".

Beispiel: $M = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dann ist mit $A \in \Gamma$

$$\begin{aligned} MAM^{-1} &= \frac{1}{n} \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & nb \\ \frac{c}{n} & d \end{pmatrix} \in \Gamma \\ \Longleftrightarrow \quad & n | c\ . \end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\Gamma_M = \Gamma_0(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma;\ c \equiv 0 \bmod n \right\}\ .$$

5.2 Eigenschaften und Struktur

[S] S.132ff

Wir definieren auf $\mathcal{M}_n$ eine Äquivalenzrelation

$$\begin{aligned} & M_1 \sim M \text{ bzw. } M_1 \equiv M \bmod \Gamma \\ \Longleftrightarrow \quad & \exists A \in \Gamma:\ M_1 = AM\ . \end{aligned}$$

Damit gilt

$$M_1 \sim M \Longrightarrow \Gamma_{M_1} = \Gamma_M\ .$$

Satz 23 *Ein vollständiges Repräsentantensystem von $\mathcal{M}_n \bmod \Gamma$ ist gegeben durch*

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix};\ \alpha > 0,\ \alpha\delta = n,\ (\alpha, \beta, \delta) = 1,\ \beta \bmod \delta \right\}$$

und es ist

$$\#\mathcal{R} = \psi(n) = n \prod_{p|n} (1 + \frac{1}{p})\ .$$

Damit ist die Anzahl der Transformationsgruppen der Ordnung n ein Teiler von $\psi(n)$. Genauer gilt:

Satz 24 *Alle Transformationsgruppen der Ordnung n sind konjugiert in Γ:*

$$M, M_1 \in \mathcal{M}_n \Longrightarrow \exists S \in \Gamma: \ \Gamma_M = S_{-1}\Gamma_{M_1}S$$

also insbesonders

$$\exists A \in \Gamma: \ \Gamma_M = A^{-1}\Gamma_0(n)A \ .$$

Die Anzahl der verschiedenen Transformationsgruppen ist also gerade der Index des Normalisators von $\Gamma_0(n)$ in Γ:

$$(\Gamma : \mathcal{N}_\Gamma(\Gamma_0(n))) \ .$$

Satz 25 *Sei $n = 2^\alpha 3^{\alpha'} t, \ (t, 6) = 1$*
und

$$\epsilon = \begin{cases} [\frac{\alpha}{2}] & : \alpha < 6 \\ 3 & : \alpha \geq 6 \end{cases}$$

$$\epsilon' = \begin{cases} 0 & : \alpha = 0, 1 \\ 1 & : \alpha \geq 2 \end{cases}$$

Dann ist

$$\mathcal{N}_\Gamma(\Gamma_0(n)) = \Gamma_0(\frac{n}{2^\epsilon 3^{\epsilon'}})$$

und

$$(\Gamma : \mathcal{N}_\Gamma(\Gamma_0(n))) = \frac{1}{2^\epsilon 3^{\epsilon'}}\psi(n) \ .$$

5.3 Transformierte Modulfunktionen [S] S.139ff

Definition 10 *Sei $f \in K_\Gamma$ nichtkonstant, dann nennen wir*

$$f_M(\tau) = f(M\tau) \qquad M \in \mathcal{M}_n$$

eine „Transformierte der Ordnung n“ von f.

Es ist

$$f_A M(\tau) = f(AM(\tau)) = f(M\tau) = f_M(\tau) \ .$$

d.h. man erhält alle möglichen Transformierten, indem man für M alle Matrizen des Repräsentantensystems $\mathcal{R}$ aus Satz 23 einsetzt.

5.4 Die Transformationsgleichung der Ordnung n [S] S.141ff

Satz 26 *Sei $f \in K_\Gamma$; das Polynom*

$$Q_n(x, f) = \prod_{M \in \mathcal{R}} (x - f_M)$$

ist irreduzibel in $K_\Gamma[X] = \mathbb{C}(J)[x]$ und vom Grad $\psi(n)$.
Außerdem ist

$$K_{\Gamma_M} = K_\Gamma(f_M) \ .$$

Besondere Beachtung verdient der Fall $f = J$:

$$P_n(x, J) = \prod_{M \in \mathcal{R}} (x - J_M)$$

Man nennt $P_n(x, J) = 0$ die Transformationsgleichung der Ordnung n. Das Polynom P_n hat erstaunliche Eigenschaften: Es ist symmetrisch in x und J und hat nur ganzzahlige Koeffizienten.

Für unsere Zwecke interessant ist:

$$K_{\Gamma_0(n)} = K_\Gamma(J_{M_0}) = \mathbb{C}(J, J_{M_0}), \qquad M_0 = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

6 Normalisatoren

Sei $\Gamma_1 \leq \Gamma$ eine Untergruppe der Modulgruppe und $\mathcal{G}$ eine Matrizengruppe, die Γ_1 enthält:

$$\Gamma_1 \leq \mathcal{G} .$$

Von Interesse sind die Untergruppen $\mathcal{U}$ von $\mathcal{G}$, die auf $\mathbb{H}^*/\Gamma_1$ bzw. $\mathcal{F}_1$ operieren (in der üblichen Weise):

$$\begin{aligned} \mathcal{U} \times \mathbb{H}^*/\Gamma_1 &\rightarrow \mathbb{H}^*/\Gamma_1 \\ (M, [\tau]) &\mapsto [M\tau] . \end{aligned}$$

Hinreichend dazu ist, daß jedes $M \in \mathcal{U}$ (unter Γ_1) äquivalente Punkte wieder auf (unter Γ_1) äquivalente Punkte abbildet und daß M eine Abbildung auf $\mathbb{H}$ ist, was gewährleistet ist, wenn M eine reelle Matrix mit positiver Determinante ist.

$$\begin{aligned} \tau \overset{\Gamma_1}{\sim} \tau' &\Longrightarrow \exists A \in \Gamma_1 : \ \tau = A\tau' \\ &\Longrightarrow \forall M \in \mathcal{U} : \ M\tau = MA\tau' \\ &\Longrightarrow M\tau = MAM^{-1}M\tau', \\ \text{d.h. } M\tau \sim M\tau' &\Longleftrightarrow MAM^{-1} \in \Gamma_1 \end{aligned}$$

$\mathcal{U}$ operiert auf $\mathbb{H}^*/\Gamma_1$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \forall M \in \mathcal{U} : \ M\Gamma_1 M^{-1} \subset \Gamma_1 \\ &\Longleftrightarrow \mathcal{U} \leq \mathcal{N}_{\mathcal{G}}(\Gamma_1) \\ &\qquad \text{(Normalisator von } \Gamma_1 \text{ in } \mathcal{G}\text{)}. \end{aligned}$$

Um ein möglichst große operierende Gruppe $\mathcal{U}$ zu erhalten, wählt man also eine große Gruppe $\mathcal{G}$ und bildet den Normalisator von Γ_1 in $\mathcal{G}$.
Als $\mathcal{G}$ bietet sich an:

$$\mathcal{G} = GL_2^+(\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; \ a, b, c, d \in \mathbb{R}, \ \det(A) > 0 \right\} .$$

Eine Anwendung haben wir z.B. im Falle Geschlecht von $\Gamma_1 \ = 0$.
Wenn $f_1 \in K_{\Gamma_1}$ mit $\operatorname{ord}(f_1) = 1$, d.h.

$$K_{\Gamma_1} = \mathbb{C}(f_1)$$

und $M \in \mathcal{N}_{\mathcal{G}}(\Gamma_1)$, so ist

$$\tau \mapsto f_1(M(\tau))$$

ebenfalls eine Modulfunktion (für Γ_1) der Ordnung 1 und daher

$$f_1(M(\tau)) = \frac{\alpha f_1(\tau) + \beta}{\gamma f_1(\tau) + \delta} \qquad \text{mit } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C} .$$

Aus dieser Gleichung lassen sich Aussagen über das Verhalten von f_1 in $\mathcal{F}$ gewinnen.

Kapitel II

Anwendung auf $\Gamma_0(n) \leq \Gamma$

Literatur:	[S]	Bruno Schoeneberg Elliptic Modular Functions Springer Verlag
	[N1]	Morris Newman Construction and application of a class of modular functions Proc. London Math. Soc.(3)7 (1957) 334-50
	[N2]	Morris Newman Construction and application of a class of modular functions II Proc. London Math. Soc.(3)9 (1959)

1 Berechnung aller wichtigen Größen für $\Gamma_0(n)$

Ab diesem Kapitel werden wir uns hauptsächlich mit inhomogenen Modulsubstitutionen befassen, sodaß wir der Einfachheit halber den Querbalken über Γ, $\Gamma_0(n)$, A etc. weglassen. Matrizen A repräsentieren in fast allen Fällen die zugehörigen inhomogenen Substitutionen, was Gleichungen wie $A = -A$ zuläßt.

1.1 Index, Anzahl der Spitzen und Fixpunkte, Geschlecht

[S] S.99ff

Index $\mu = \mu(n) = (\Gamma : \Gamma_0(n))$**:**

Aus Satz 23 und 24 in I.5 ergibt sich

$$\mu(n) = n \prod_{p|n} (1 + \frac{1}{p}) \ .$$

Die Zahlen $\epsilon_\rho, \epsilon_i, \sigma_\infty$ wollen wir mit Satz 20 in II.3 berechnen. Dazu beschaffen wir uns zuerst ein hinreichendes Kriterium für die Kongruenz zweier Matrizen $\in \Gamma$ mod $\Gamma_0(n)$.

Zwei Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \Gamma$ sind kongruent mod $\Gamma_0(n)$, wenn $AA'^{-1} \in \Gamma_0(n)$, bzw. wenn

$$cd' - c'd \equiv 0 \bmod n \ .$$

Umgekehrt kann man zwei beliebige Zahlenpaare

$$(c,d), (c',d') \text{ mit } (c,d,n) = (c',d',n) = 1,$$

die diese Gleichung erfüllen, nach einer eventuellen Veränderung mod n, zu zwei Matrizen $\in \Gamma$ ergänzen, die kongruent mod $\Gamma_0(n)$ sind. Es ist

$$cd' - c'd \equiv 0 \bmod n \Longleftrightarrow \exists \delta \in \mathbb{Z} : \ c \equiv \delta c' \bmod n \text{ und } d \equiv \delta d' \bmod n$$

Denn: Seien c, d, c', d' gegeben mit $(c,d,n) = (c',d',n) = 1$. Wir ergänzen (wie oben gesagt) zu zwei Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c_1' & d_1' \end{pmatrix} \in \Gamma$$

mit

$$c_1 \equiv c, \ d_1 \equiv d, \ c_1' \equiv c', \ d_1' \equiv d' \bmod n \ .$$

Mit $cd' - c'd \equiv 0$ mod n folgt

$$\begin{aligned} & AA'^{-1} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \bmod n \qquad \text{mit } \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{Z} \\ \Longleftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \bmod n \ . \end{aligned}$$

woraus die gewünschte Beziehung folgt. Die Umkehrung ist klar.
Zwei solche Zahlenpaare nennen wir *„proportional“* mod n

Wir erhalten also aus jeder Klasse von Γ mod $\Gamma_0(n)$ genau einen Repräsentanten, wenn wir die Zahlenpaare (c,d) mit

$$\begin{aligned} &i) \qquad (c,d,n) = 1, \\ &ii) \qquad (c,d) \text{ paarweise nichtproportional mod n} \end{aligned}$$

zu Matrizen $\in \Gamma$ ergänzen.

Anzahl der Fixpunkte $\epsilon_\rho = \epsilon_\rho(n), \epsilon_i = \epsilon_i(n)$:

In I.3 Satz 20 haben wir erfahren, daß ϵ_ρ die Zahl der mod $\Gamma_0(n)$ inkongruenten $A \in \Gamma$ mit $ARA^{-1} \in \Gamma_0(n)$ ist.
Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ ist das äquivalent zu $i), ii)$ oben und zusätzlich

$$iii) \qquad c^2 - cd + d^2 \equiv 0 \bmod n \ .$$

Diese drei Bedingungen bekommen eine einfache Bedeutung, wenn wir für (c,d) die ganze algebraische Zahl $\omega = c - d\rho$ in $\mathbb{Q}(\rho)$ einführen. In der Sprechweise der algebraischen Zahlkörper erhalten wir die äquivalenten Bedingungen:

$$\begin{aligned} &i)' \qquad (\omega, n) \text{ hat keine Teiler } \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}, \\ &ii)' \qquad \omega' \neq \omega \Longrightarrow \omega' \neq g\omega \text{ für } g \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ &iii)' \qquad N(\omega) \equiv 0 \bmod n \qquad (N(\omega) = \text{Norm von } \omega). \end{aligned}$$

n habe die Primzerlegung

$$n = 3^a \prod_{\nu=1}^{r} p_\nu^{m_\nu} \qquad \text{mit } a \geq 0, \ m_\nu > 0 \ .$$

Wenn unter den p_ν ein p ist mit $\left(\frac{-3}{p}\right) = -1$, dann

$$N(\omega) = \omega\omega' \equiv 0 \bmod p \Longrightarrow p|(\omega, n)$$

was $i)'$ widerspricht. Wenn $a \geq 2$, dann

$$N(\omega) = \omega\omega' \equiv 0 \bmod 9 \Longrightarrow 3|(\omega, n)\ .$$

In diesen Fällen ist also $\epsilon_\rho = 0$.

In den verbleibenden Fällen ist $a = 0$ oder $a = 1$ und $\left(\frac{-3}{p_\nu}\right) = 1$ für alle ν. Damit hat jede Primzahl $p_\nu \neq 3$ eine Zerlegung

$$p_\nu = \pi_\nu \cdot \overline{\pi_\nu}$$

im Ring $\mathbb{Z}(\rho)$ der ganzen Elemente von $\mathbb{Q}(\rho)$ mit nichtasoziierten Primelementen $\pi_\nu, \overline{\pi_\nu}$. Wir nehmen an, daß ω die Bedingungen $i)'$ und $iii)'$ erfüllt.
Wäre

$$\omega \equiv 0 \bmod \pi_\nu \cdot \overline{\pi_\nu}$$

hätten wir

$$p_\nu = \pi_\nu \cdot \overline{\pi_\nu}|(\omega, n)$$

was $i)'$ widerspricht. Also kann man π_ν und $\overline{\pi_\nu}$ so wählen, daß

$$\omega = \lambda \cdot \gamma \qquad \text{mit } \lambda \in \mathbb{Z}(\rho),\ (\lambda, \overline{\gamma}) = 1,\ \gamma = \sqrt{-3}^a \pi_1^{m_1} \cdots \pi_r^{m_r}\ .$$

Alle Zahlen ω dieser Form erfüllen die Bedingungen $i)'$ und $iii)'$. Weiterhin zeigt uns $ii)'$, daß der Faktor λ keinen Einfluß auf die gleichzeitigen Lösungen von $i)', ii)'$ und $iii)'$ hat.
Denn: Sei $\lambda' \in \mathbb{Z}(\rho)$ mit $(\lambda', \overline{\gamma})$ gegeben. Dann ist $\lambda' \equiv g\lambda \bmod \overline{\gamma}$ lösbar für $g \in \mathbb{Z}(\rho)$. In jeder Restklasse mod $\overline{\gamma}$ gibt es einen rationalen Vertreter, da

$$z \in \mathbb{Z},\ z \equiv 0 \bmod \overline{\gamma} \Longrightarrow z \equiv 0 \bmod n\ .$$

Also können wir $g \in \mathbb{Z}$ wählen. Indem wir $\lambda' \equiv g\lambda \bmod \overline{\gamma}$ mit γ multiplizieren, erhalten wir

$$\omega' \equiv g\omega \bmod n\ .$$

Da jedoch

$$\omega = \lambda\gamma \text{ und } \omega' \equiv g\omega \bmod n \Longrightarrow \omega' = \lambda'\gamma$$

sehen wir, daß die verschiedenen Lösungen von $i)', ii)'$ und $iii)'$ durch die verschiedenen Möglichkeiten für γ gegeben sind. Also ist deren Anzahl, ϵ_ρ, die Zahl der r-Tupel $(\pi_1', \ldots, \pi_r')$ mit $\pi_i' \in \{\pi_i, \overline{\pi_i}\}$. Also $\epsilon_\rho = 2^r$. Insgesamt erhalten wir:

$$\epsilon_\rho = \begin{cases} 0 & \text{wenn } 9|n \\ \prod\limits_{p|n}(1 + \left(\frac{-3}{p}\right)) & \text{sonst} \end{cases}$$

Es ist

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{3}\right)(-1)^{\frac{3-1}{2}\frac{p-1}{2}} = \left(\frac{p}{3}\right)$$

also

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = -1 \Longleftrightarrow \left(\frac{p}{3}\right) = -1 \Longleftrightarrow p \equiv 2 \bmod 3$$

und wir halten fest

$$\epsilon_\rho = 0 \Longleftrightarrow 9|n \text{ oder } \exists p|n:\ p \equiv 2 \bmod 3$$

Die Berechnung von ϵ_i verläuft analog, wenn wir $\mathbb{Q}(\rho)$ durch $\mathbb{Q}(i)$ ersetzen. Es ergibt sich:

$$\epsilon_i = \begin{cases} 0 & \text{wenn } 4|n \\ \prod\limits_{p|n}(1+\left(\frac{-1}{p}\right)) & \text{sonst} \end{cases}$$

und wir halten wieder fest

$$\epsilon_i = 0 \Longleftrightarrow 4|n \text{ oder } \exists p|n: \; p \equiv 3 \bmod 4$$

ϵ_ρ und ϵ_i sind schwach multiplikative Funktionen von n.

Anzahl der Spitzen $\sigma_\infty = \sigma_\infty(n)$:

In I.3 Satz 20 haben wir gesehen, daß

$$\sigma_\infty = \sum_{\nu=1}^{\mu(n)} \frac{1}{\kappa_\nu} \; .$$

In dieser Formel ist κ_ν die kleinste natürliche Zahl, für die $A_\nu U^k A_\nu^{-1} \in \Gamma_0(n)$, wobei $A_\nu = \left(\begin{smallmatrix} a_\nu & b_\nu \\ c_\nu & d_\nu \end{smallmatrix}\right)$ und $\frac{a_\nu}{c_\nu}$ die Spitze ist, die zur Ecke V_ν gehört (vgl. II.3.4).
Wir erhalten

$$A_\nu U_\nu^\kappa A_\nu^{-1} \equiv \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{smallmatrix}\right) \bmod n \Longleftrightarrow c_\nu^2 \kappa_\nu \equiv 0 \bmod n$$

woraus folgt

$$\kappa_\nu = \frac{n}{(c_\nu^2, n)} \; .$$

Wir führen ein: $t = (c, n)$, $t_\nu = (c_\nu, n)$ und damit $(c_\nu^2, n) = t_\nu \cdot (t_\nu, \frac{n}{t_\nu})$. Einsetzen liefert

$$\sigma_\infty = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{\mu(n)} t_\nu (t_\nu, \frac{n}{t_\nu}) \; .$$

Nun zählen wir, wie oft ein bestimmtes c mod n unter den c_ν vorkommt. Zu c mod n gibt es genau $\phi(t)$ Werte für d mod t. Also gibt es $\frac{n}{t}\phi(t)$ inkongruente Werte für d mod n. Da darin Paare (c, d) enthalten sind, die proportional mod n sind, müssen wir diese Summe durch $\phi(n)$ dividieren, also

$$\sigma_\infty = \frac{1}{\phi(n)} \sum_{c \bmod n} (t, \frac{n}{t}) \phi(t) \; .$$

Jeder Teiler t von n kommt dabei für $\phi(\frac{n}{t})$ verschiedene c mod n vor und damit

$$\sigma_\infty = \frac{1}{\phi(n)} \sum_{t|n} (t, \frac{n}{t}) \phi(t) \phi(\frac{n}{t}) \; .$$

Wegen

$$\phi(n_1)\phi(n_2) = \phi(n_1 n_2) \frac{\phi((n_1, n_2))}{(n_1, n_2)}$$

erhalten wir

$$\sigma_\infty = \sum_{t|n} \phi((t, \frac{n}{t})) \; .$$

Geschlecht $g = g(n)$:

Das Geschlecht von $\Gamma_0(n)$ berechnet sich nach Satz 19 II.3.4 durch

$$g = 1 + \frac{\mu}{12} - \frac{\epsilon_\rho}{3} - \frac{\epsilon_i}{4} - \frac{\sigma_\infty}{2} \; .$$

Mit dieser Formel berechnen wir

$$g(n) = 0 \Longleftrightarrow n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 16, 18, 25\} \; .$$

1.2 Spitzen

Die Anzahl $\sigma_\infty(n)$ eines maximalen Systems $\mathcal{S}_n$ nichtäquivalenter Spitzen von $\Gamma_0(n)$ wurde im vorigen Abschnitt berechnet als

$$\sigma_\infty(n) = \sum_{t|n} \phi((t, \frac{n}{t})) \ .$$

Die Fächerweite an einer Spitze $s = \frac{a}{b}$ ergab sich als

$$\kappa(s) = \frac{n}{(b^2, n)} \ .$$

Das System $\mathcal{S}_n$ ist eine Teilmenge von

$$\{i\infty, 0\} \cup \{\frac{t}{n};\ |t| \leq \frac{n}{2} \text{ und } (t, n) > 1\} \ .$$

Beweis: Sei $s = \frac{a}{b}$ gegeben, $(a, b) = 1$

$$\begin{aligned} (b, n) = 1 \quad &\Longrightarrow \quad s \sim 0 \\ (b, n) = n \quad &\Longrightarrow \quad s \sim i\infty \ . \end{aligned}$$

$1 < (b, n) < n$:

Sei $g = (b, n),\ b = gb_0,\ n = gn_0$

$$\begin{aligned} (b_0, n_0) = 1 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{a}{b_0} \overset{\Gamma_0(n_0)}{\sim} 0 \\ &\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ n_0\gamma & \delta \end{pmatrix} \frac{a}{b_0} = 0 \qquad\qquad (*) \end{aligned}$$

mit gewissen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z},\ \alpha\delta - n_0\beta\gamma = 1$.

$(\delta, g) = 1$: $\Longrightarrow \exists k :\ \beta + k\delta \equiv 0 \bmod g$, also $\beta + k\delta = \beta' g$.
Damit ist

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ n_0\gamma & \delta \end{pmatrix} \frac{a}{b_0} = k \\ \Longleftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} \alpha' & g\beta' \\ n_0\gamma & \delta \end{pmatrix} \frac{a}{b_0} = k \qquad \text{mit } \alpha' = \alpha + kn_0\gamma \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{1}{g} \begin{pmatrix} \alpha' & g\beta' \\ n_0\gamma & \delta \end{pmatrix} \frac{a}{b_0} = \frac{k}{g} \\ \Longleftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ n\gamma & \delta \end{pmatrix} \frac{a}{b} = \frac{k}{g} \ . \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$s = \frac{a}{b} \overset{\Gamma_0(n)}{\sim} \frac{k}{g} = \frac{kn_0}{n} \ .$$

Durch evtl. ganzzahliges Verschieben von $\frac{kn_0}{n}$ in das Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ erhalten wir die gewünschte Form.

$(\delta, g) > 1$: $\Longrightarrow (\beta, g) = 1,\ (n_0, g) = 1 \Longrightarrow (\beta n_0, g) = 1$
Wähle l so, daß $(\delta + l\beta n_0, g) = 1$ und multipliziere $(*)$ mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ln_0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n_0)$.
Es ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ n_0(\gamma + \delta n_0) & \delta + l\beta n_0 \end{pmatrix} \frac{a}{b_0} = 0$$

und wir können wie oben verfahren. ■

Wir haben in dem Beweis außerdem gesehen, daß die Nenner äquivalenter Spitzen den gleichen ggT mit n haben müssen.

Beispiel: Im Fall $n = 2^\alpha n_0,\ \alpha \leq 3, (2, n_0) = 1$ und n_0 quadratfrei, können wir als Spitzen wählen:

$$\mathcal{S}_n = \{i\infty, 0\} \cup \{\frac{1}{t};\ 1 < t < n, t|n\}$$

und haben

$$\kappa_n(\frac{1}{t}) = \frac{n}{t}\ .$$

Wir wollen uns noch eine andere Formel für $\sigma_\infty(n)$ beschaffen.

$n = p^\alpha k,\ (p, k) = 1$

$$\begin{aligned} \sigma_\infty(n) &= \sum_{t|n} \phi((t, \frac{n}{t})) \\ &= \sum_{i=0}^{\alpha} \phi((p^i t, \frac{n}{p^i t})) \\ &= \sum_{i=0}^{\alpha} \phi((p^i t, p^{\alpha-i}\frac{k}{t})) \\ &= \sum_{i=0}^{\alpha} \phi(p^{\min\{i,\alpha-i\}})\phi((t, \frac{k}{t})) \\ &= \sum_{i=0}^{\alpha} \phi(p^{\min\{i,\alpha-i\}}) \cdot \sigma_\infty(k) \\ &= C \cdot \sigma_\infty(k) \end{aligned}$$

1.Fall: $\alpha = 2\beta$

$$\begin{aligned} C &= 2(\phi(1) + \phi(p) + \ldots + \phi(p^{\beta-1})) + \phi(p^\beta) \\ &= 2(1 + (p-1) + \ldots + (p-1)p^{\beta-2}) + (p-1)p^{\beta-1} \\ &= 2(1 + (p-1) \cdot \frac{p^{\beta-1}-1}{p-1}) + (p-1)p^{\beta-1} \\ &= (p+1)p^{\beta-1} \end{aligned}$$

2.Fall: $\alpha = 2\beta + 1$

$$\begin{aligned} C &= 2(\phi(1) + \phi(p) + \ldots + \phi(p^\beta)) \\ &= 2(1 + (p-1) + \ldots + (p-1)p^{\beta-1}) \\ &= 2(1 + (p-1) \cdot \frac{p^\beta - 1}{p-1}) \\ &= 2p^\beta \end{aligned}$$

also

$$\sigma_\infty(n) = \left\{ \begin{array}{cc} 2p^\beta & \alpha = 2\beta + 1 \\ (p+1)p^\beta & \alpha = 2\beta \end{array} \right\} \sigma_\infty(k) = (p^{[\frac{\alpha}{2}]} + p^{[\frac{\alpha-1}{2}]})\sigma_\infty(k)\ .$$

Es zeigt sich, daß σ_∞ als Funktion von n schwach multiplikativ ist und wir bekommen eine neue Formel für σ_∞, die besonders für große n bessere Dienste leistet als die ursprüngliche.

$$\sigma_\infty(n) = \prod_{p^\alpha || n} (p^{[\frac{\alpha}{2}]} + p^{[\frac{\alpha-1}{2}]}) \ .$$

Zum Abschluß wollen wir untersuchen wie man - ohne lästiges Ausprobieren - ein maximales System paarweise nichtäquivalenter Spitzen $\mathcal{S}_n$ (auch für nicht quadratfreie n) bekommt. Wir wissen bereits, daß die Nenner äquivalenter Spitzen den gleichen ggT mit n haben müssen und daß für die Konstruktion von $\mathcal{S}_n$ die Teiler von n als Nenner ausreichen.

Wir behandeln zuerst den Spezialfall $n = p^\alpha$. Es genügt, die Nenner

$$1, p, \ldots, p^\alpha$$

zu betrachten. Seien $s = \frac{a}{p^i}$, $s' = \frac{b}{p^i}$ zwei Spitzen mit gleichem Nenner. Wir untersuchen, wann diese äquivalent unter $\Gamma_0(p^\alpha)$ sind. Es seien

$$A = \begin{pmatrix} a & u \\ p^i & v \end{pmatrix}, \qquad \det(A) = 1, \qquad B = \begin{pmatrix} b & u' \\ p^i & v' \end{pmatrix}, \qquad \det(B) = 1$$

Transformationen mit

$$A(i\infty) = s, \ B(i\infty) = s' \ .$$

also sind alle Transformationen in Γ, die s auf s' abbilden, gegeben durch

$$\begin{aligned} BT^kA^{-1} &= \begin{pmatrix} b & u' \\ p^i & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & u \\ -p^i & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & * \\ (v-v')p^i - kp^{2i} & * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} & BT^kA^{-1} \in \Gamma_0(p^\alpha) \\ \Longleftrightarrow \quad & (v-v')p^i - kp^{2i} \equiv 0 \bmod p^\alpha \\ \Longleftrightarrow \quad & (v-v') - kp^i \equiv 0 \bmod p^{\alpha-i} \ . \end{aligned}$$

1.Fall: $0 \leq i \leq \frac{\alpha}{2}$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & v \equiv v' \bmod p^i \\ \text{d.h.} \quad & v \not\equiv v' \bmod p^i \Longrightarrow s \not\sim s' \ . \end{aligned}$$

2.Fall: $\frac{\alpha}{2} \leq i \leq \alpha$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & v \equiv v' \bmod p^{\alpha-i} \\ \text{d.h.} \quad & v \not\equiv v' \bmod p^{\alpha-i} \Longrightarrow s \not\sim s' \ . \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen für die Determinanten von A, B folgt

$$av \equiv 1 \bmod p^i, \ bv' \equiv 1 \bmod p^i \ ,$$

d.h. es gilt

$$v \equiv v' \bmod p^i \Longleftrightarrow a \equiv b \bmod p^i$$

und für $i \geq \frac{\alpha}{2}$ dann auch

$$v \equiv v' \bmod p^{\alpha-i} \Longleftrightarrow a \equiv b \bmod p^{\alpha-i} \ .$$

Wir setzen

$$i' = \left\{ \begin{array}{cc} i & 0 \le i \le \frac{\alpha}{2} \\ \alpha - i & \frac{\alpha}{2} < i \le \alpha \end{array} \right\} = \min\{i, \alpha - i\} \ .$$

Ergebnis: die Menge

$$\mathcal{M} = \bigcup_{i=0}^{\alpha} \{\frac{a_i}{p^i};\ a_i \in \text{ primes Restsystem mod } p^{i'}\}$$

besteht aus paarweise inäquivalenten Spitzen. Wir überprüfen die Anzahl:

1.Fall: $\alpha = 2\beta$

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}| &= 2(\phi(1) + \phi(p) + \ldots + \phi(p^{\beta-1})) + \phi(p^\beta) \\ &= (p+1)p^{\beta-1} \\ &= \sigma_\infty(n) \end{aligned}$$

2.Fall: $\alpha = 2\beta + 1$

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}| &= 2(\phi(1) + \phi(p) + \ldots + \phi(p^{\beta})) \\ &= 2p^{\beta} \\ &= \sigma_\infty(n) \end{aligned}$$

sodaß $\mathcal{M}$ auch ein maximales System $\mathcal{S}_{p^\alpha}$ ist.

Außerdem haben wir gesehen:

Die Anzahl der Spitzen $s = \frac{a}{p^i} \in \mathcal{S}_{p^\alpha}$ ist

$$\begin{array}{lll} \phi(p^i) & \text{für} & 1 \le i \le \frac{\alpha}{2} \\ \phi(p^{\alpha-i}) & \text{für} & \frac{\alpha}{2} < i \le \alpha \end{array}$$

wobei wir $0 \sim 1$ als Spitze mit Nenner 1 und $i\infty \sim \frac{1}{p^\alpha}$ als Spitze mit Nenner p^α betrachten.

Nun zum allgemeinen Fall: es sei

$$n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$$

die Primzerlegung von n. Ein beliebiger Teiler t von n ist dann gegeben durch

$$t = \prod_{k=1}^{r} p_k^{i_k}, \qquad 0 \le i_k \le \alpha_k,\ k = 1 \ldots r \ .$$

Wir setzen

$$i'_k = \left\{ \begin{array}{cc} i_k & 0 \le i_k \le \frac{\alpha_k}{2} \\ \alpha_k - i_k & \frac{\alpha_k}{2} < i_k \le \alpha_k \end{array} \right\} = \min\{i_k, \alpha_k - i_k\}$$

und

$$t' = \prod_{k=1}^{r} p_k^{i'_k} \ .$$

Behauptung: Die Menge

$$\mathcal{M} = \bigcup_{t|n} \{\frac{a}{t};\ a \in \text{ primes Restsystem mod } t'\}$$

ist ein maximales System paarweise inäquivalenter Spitzen von $\Gamma_0(n)$.

Beweis:

Inäquivalenz: Es genügt, 2 Spitzen $s, s' \in \mathcal{M}$ mit gleichem Nenner zu überprüfen:

$$s = \frac{a}{t},\ s' = \frac{b}{t}, \qquad t|n$$

dann ist

$$\begin{aligned} & a \not\equiv b \bmod t' \\ \Longrightarrow\quad & \exists k : \qquad a \not\equiv b \bmod p_k^{i'_k} \\ \Longrightarrow\quad & \text{(siehe Spezialfall)} \qquad \frac{a}{t} \overset{\Gamma_0(p_k^{\alpha_k})}{\not\sim} \frac{b}{t} \\ \Longrightarrow\quad & \frac{a}{t} \overset{\Gamma_0(n)}{\not\sim} \frac{b}{t}\ . \end{aligned}$$

Anzahl: Sei $n = p_1^{\alpha_1} n_0,\ (p_1, n_0) = 1$

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}| &= \sum_{t|n} \phi(t') \\ &= \sum_{i_1=0}^{\alpha_1} \sum_{t|n_0} \phi(p_1^{i'_1}) \phi(t') \\ &= \sum_{i_1=0}^{\alpha_1} \phi(p_1^{i'_1}) \sum_{t|n_0} \phi(t')\ . \end{aligned}$$

Die vordere Summe entspricht gerade der Summe C in der Herleitung der zweiten Formel für $\sigma_\infty(n)$, also

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}| &= (p_1^{[\frac{\alpha_1}{2}]} + p_1^{[\frac{\alpha_1 - 1}{2}]}) \sum_{t|n_0} \phi(t') \\ &= \sigma_\infty(n) \end{aligned}$$

durch Induktion. ■

Weiterhin können wir jetzt die Anzahl θ der Spitzen $s = \frac{a}{b}$ mit $p^i || b$ berchnen (was wir in Kapitel IV des öfteren brauchen werden).

Es sei $n = p^\alpha n_0,\ (p, n_0) = 1$

$$\begin{aligned} \theta &= \sum_{p^i || t | n} \phi(t') \\ &= \sum_{t|n_0} \phi(p^{i'} t') \\ &= \phi(p^{i'}) \sum_{t|n_0} \phi(t') \\ &= \phi(p^{i'}) \sigma_\infty(n_0)\ . \end{aligned}$$

1.3 Fundamentalbereich, Erzeugendensystem und Fixpunkte

Der Fundamentalbereich liefert eine herrliche optische Repräsentation unserer Theorie und Berechnungen. Die Interpretation von $\mathbb{H}^*/\Gamma_0(n)$ als hyperbolischer Polyeder wird offenkundig und alle berechneten Charakteristika von $\Gamma_0(n)$ erfahren eine deutliche Veranschaulichung. Nicht zuletzt ist er einfach schön anzusehen.

Um die Fundamentalbereiche $\mathcal{F}_n$ für $\Gamma_0(n)$ zu konstruieren, verwenden wir die in den vorigen Abschnitten berechneten Daten.
Da

$$\forall n: \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n)$$

können wir uns darauf beschränken, $\mathcal{F}_n$ im Bereich $\{z;\ |\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}\}$ zu suchen.
Unser Ziel ist es, den $\mathcal{F}_n$ eine möglichst einfache Gestalt zu geben, d.h. der Rand von $\mathcal{F}_n$ sollte aus möglichst wenig Kreisbögen zusammengesetzt sein, damit die Anzahl der Randsubstitutionen und damit das Erzeugendensystem möglichst klein wird. Dies ist erreicht, wenn der Rand nur aus vollständigen Halbkreisen (h-Geraden) besteht, was aber nicht immer möglich ist (siehe dazu 1.4).
Als ersten Ansatz konstruieren wir an jeder Spitze s von $\Gamma_0(n)$ einen Fächer der Weite $\kappa(s)$.

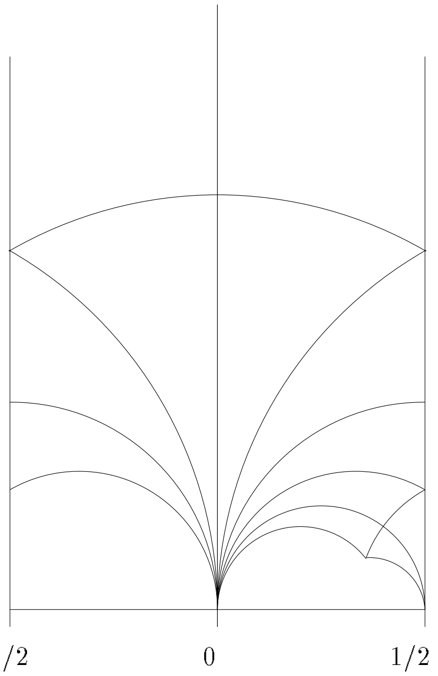
Wenn $A(i\infty) = s$, so ist der gesamte Fächer bei s gegeben durch

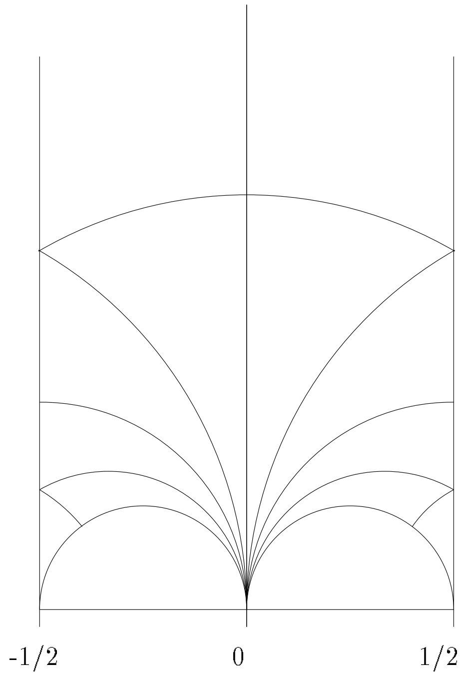
$$AT^k(\mathcal{F}) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

wobei $\mathcal{F}$ den Fundamentalbereich von Γ bezeichnet.
Als Fächer der Weite κ kann man also beliebige κ aufeinanderfolgende dieser Modulvierecke bzw. 2κ aufeinanderfolgende Moduldreiecke wählen.
Im zweiten Schritt versuchen wir, durch Hinzunahme weiterer äquivalenter Spitzen die Anzahl der begrenzenden Kreisbögen zu minimieren.
Zur Konstruktion verwenden wir die Formeln aus I.1.7.

Beispiel: $n = 4$

Spitzen s	$i\infty$	0	$\frac{1}{2}$
Fächerweiten $\kappa(s)$	1	4	1

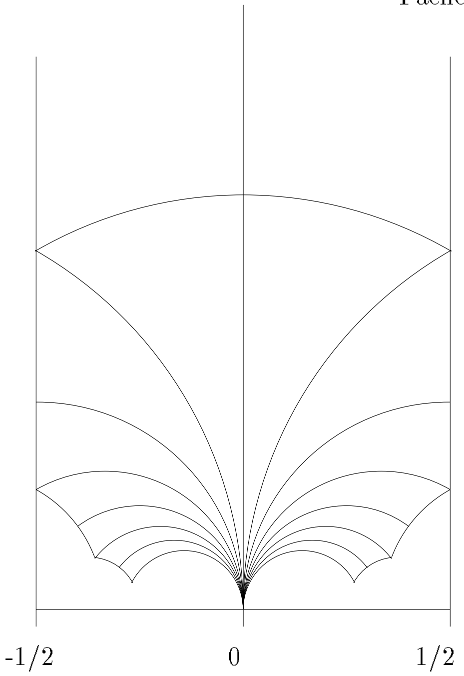


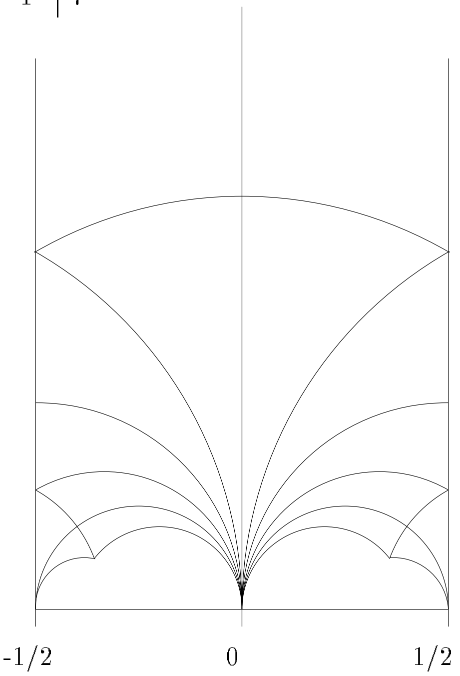


Zunächst erhalten wir für $\mathcal{F}_4$ die Form aus dem linken Bild. Durch Hinzunahme der Spitze $-\frac{1}{2}$ die zu $\frac{1}{2}$ äquivalent ist (vermöge $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\4&1\end{smallmatrix}\right)$) und damit verbundener Aufteilung dieses Fächers und zusätzlicher Drehung des Fächers bei 0 um ein Moduldreieck nach links bekommen wir die einfachere und auch einfachste Gestalt von $\mathcal{F}_4$.
Tatsächlich hat es sich in allen Fällen bewährt, $\mathcal{F}_n$ symmetrisch zur Imaginärachse zu gestalten, d.h. zu jeder Spitze $\frac{c}{d}$ auch die Spitze $-\frac{c}{d}$ hinzuzunehmen.

Beispiel: $n = 7$

Spitzen	s	$i\infty$	0
Fächerweiten	$\kappa(s)$	1	7



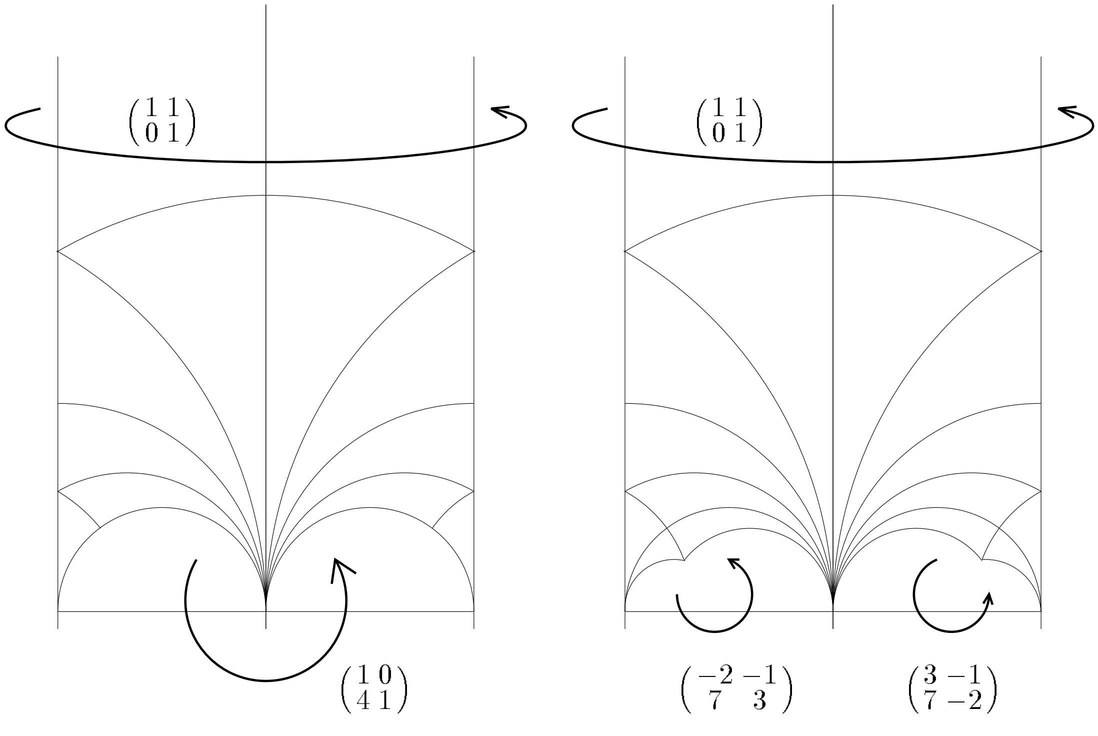


Zunächst erhält $\mathcal{F}_7$ die linke Gestalt. Durch Hinzunahme der Spitzen $\pm\frac{1}{2}$, die zu 0 äquivalent sind (vermöge $\begin{pmatrix}\pm 4 & 1\\ 7 & \pm 2\end{pmatrix}$) teilt sich der Fächer bei 0, und wir erhalten die einfachste Gestalt von $\mathcal{F}_7$ im rechten Bild.

Mit etwas Übung sieht man sehr schnell, welche Spitzen man hinzunehmen muß um die einfachste Gestalt zu bekommen.
Es bleibt noch zu klären, welche Teile des Randes zu $\mathcal{F}_n$ gehören, was aber einfach anzugeben ist, wenn man die Randsubstitutionen gefunden hat: Man wählt von jedem Paar äquivalenter Randstücke eines aus, das zu $\mathcal{F}_n$ gehören soll.
Um ein System von Randsubstitutionen von $\mathcal{F}_n$ zu bekommen, muß man untersuchen, welche Randstücke durch Modulsubstitutionen miteinander verbunden sind. In allen Fällen wird der linke Rand ($\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}$) vermöge $T = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(n)$ auf den rechten Rand ($\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$) abgebildet. Damit zwei Kreisbögen mit einem $A \in \Gamma_0(n)$ aufeinander abgebildet werden können, ist es notwendig, daß sie äquivalente Fußpunkte haben.
Um diese Substitutionen zu finden, verwende man, daß alle Substitutionen, die eine Spitze s auf eine Spitze s' abbilden, gegeben sind durch

$$A'T^kA^{-1}, \qquad k \in \mathbb{Z} \text{ und } A(i\infty) = s,\ A'(i\infty) = s'\ .$$

Beispiel: $n = 4,\ n = 7$



Es ergibt sich

$$\Gamma_0(4) =< \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix} >, \qquad \Gamma_0(7) =< \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2&-1\\7&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&-1\\7&-2\end{pmatrix} >$$

und als Rand für $\mathcal{F}_4$ können wir $h(-\frac{1}{2},\infty) \cup h(-\frac{1}{2},0)$ wählen und für $\mathcal{F}_7$ gerade $h(-\frac{1}{2},\infty)$ und die entsprechenden Teile von $h(\pm\frac{2}{5},0)$.
Weiter erkennt man, daß $\Gamma_0(4)$ keine elliptischen Fixpunkte hat und daß $\Gamma_0(7)$ zwei inäquivalente Fixpunkte τ_ρ besitzt, nämlich gerade die Fixpunkte von $\begin{pmatrix}-2&-1\\7&3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}3&-1\\7&-2\end{pmatrix}$:

$$\tau_{\rho_{1/2}} = \frac{\pm 5 + \sqrt{3}i}{14} \qquad \text{bzw.} \qquad \tau_{\rho_1} = \frac{\rho - 2}{7},\ \tau_{\rho_2} = \frac{\rho + 3}{7}$$

in Übereinstimmung mit den Berechnungen im vorigen Abschnitt und in III.2.

1.4 Gruppenstruktur

Im letzten Abschnitt haben wir uns ein Erzeugendensystem für $\Gamma_0(n)$, durch ein vollständiges System von Randsubstitutionen des Fundamentalbereichs, beschafft - ein rein topologischer Weg. Um weitere Aussagen über Gruppenstruktur und Minimalität dieser Erzeugendensysteme zu gewinnen, brauchen wir 2 Sätze aus der Gruppentheorie (nachzulesen bei [Ku] S.217 und 236).

Satz 27 *Ist die Gruppe G ein freies Produkt der Gruppen $H_i,\ i = 1 \ldots r$*

$$G = H_1 * H_2 * \ldots * H_r$$

und U eine Untergruppe von G, so existiert eine freie Zerlegung von U

$$U = F * L_1 * L_2 * \ldots * L_s$$

wobei F eine freie Gruppe ist und jedes L_j, $j = 1 \ldots r$ konjugiert zu einer gewissen Untergruppe eines der H_i ist.

Satz 28 (Schreier) *Ist F eine freie Gruppe vom Rang $n < \infty$ und $U \leq F$ eine Untergruppe vom Index i, so ist U frei vom Rang $k < \infty$ und es gilt*

$$k = 1 + i(n-1) \ .$$

Wir erinnern uns:

Die Gruppe Γ der inhomogenen Modulsubstitutionen (Ich weise nocheinmal darauf hin, daß wir gegenüber Kapitel I den Querbalken weglassen) ist das freie Produkt einer zyklischen Gruppe der Ordnung 2 mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung 3 (siehe I.1.2)

$$\begin{array}{rcl} \Gamma & = & <S> * <R> \\ & \cong & Z_2 \ * \ Z_3 \end{array} \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wenn wir Satz 27 auf Γ und $\Gamma_0(n)$ anwenden, so ist $\Gamma_0(n)$ das freie Produkt einer freien Gruppe und gewissen - zu $<S>$ oder $<R>$ konjugierten - Gruppen der Ordnungen 2 bzw. 3. Diese entsprechen aber genau den elliptischen Substitutionen in $\Gamma_0(n)$, deren Anzahl wir bereits kennen: ϵ_i bzw. ϵ_ρ. Es ergibt sich

$$\Gamma_0(n) \cong F_k * \underbrace{Z_2 * \ldots * Z_2}_{\epsilon_i} * \underbrace{Z_3 * \ldots * Z_3}_{\epsilon_\rho}$$

wobei F_k eine freie Gruppe vom Rang k bezeichnet. Ein minimales Erzeugendensystem für $\Gamma_0(n)$ hat also die Mächtigkeit $e = k + \epsilon_i + \epsilon_\rho$.
Wenn man annimmt, daß die Fundamentalbereiche in III.2 alle minimale Erzeugendensysteme liefern, erhält man in allen Fällen $k = \sigma_\infty - 1$. Nachdem ich auch einige Fundamentalbereiche höheren Geschlechts bestimmt habe, scheint es sich zu bestätigen, daß gilt

$$k = \sigma_\infty + 2g - 1$$

also

$$\begin{array}{rcl} e & = & \sigma_\infty + 2g - 1 + \epsilon_i + \epsilon_\rho \\ & = & 1 + \dfrac{\epsilon_i}{2} + \dfrac{\epsilon_\rho}{3} + \dfrac{\mu}{6} \end{array}$$

Es ist mir leider nicht gelungen, dies zu beweisen, doch es lassen sich einige Beobachtungen machen, die diese Hypothese untermauern.
Eine Teilbehauptung läßt sich einfach mit dem Satz von Schreier beweisen:

Ist $\Gamma_0(m)$ frei (d.h. $\epsilon_i = \epsilon_\rho = 0$) vom Rang $k = e = 1 + \frac{\mu}{6}$, so gilt obige Behauptung auch für die entsprechenden Untergruppen, d.h. für die Gruppen $\Gamma_0(n)$ mit $m|n$.

Denn: Es genügt, die Untergruppen $\Gamma_0(mp)$, p prim, zu betrachten. Der Rang von $\Gamma_0(mp)$ sei k'.

1.Fall: $p|m$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & (\Gamma_0(m) : \Gamma_0(mp)) = \frac{\mu(mp)}{\mu(m)} = p \\ \Longrightarrow \quad & k' = 1 + p(k-1) \\ & = 1 + p\,\frac{\mu(m)}{6} \\ & = 1 + \frac{\mu(mp)}{6} \end{aligned}$$

2.Fall: $p \not| m$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & (\Gamma_0(m) : \Gamma_0(mp)) = \frac{\mu(mp)}{\mu(m)} = p+1 \\ \Longrightarrow \quad & k' = 1 + (p+1)(k-1) \\ & = 1 + (p+1)\,\frac{\mu(m)}{6} \\ & = 1 + \frac{\mu(mp)}{6} \end{aligned}$$

Wir führen ein:

Definition 11 *Ein Fundamentalbereich $\mathcal{F}_n$ heiße „glatt“, wenn er 0 als Spitze besitzt, symmetrisch zur Imaginärachse ist und der Rand von $\mathcal{F}_n$ nur aus vollständigen h-Geraden besteht.*

Ein glatter Fundamentalbereich enthält notwendig die Spitzen $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$. Weiter läßt sich beobachten, daß ein solcher stets zu einer Gruppe $\Gamma_0(n)$ mit $6|\mu(n)$ gehört, genauer:

Ist $\mathcal{F}_n$ glatt und enthält k Spitzen zwischen $-\frac{1}{2}$ und 0, so ist

$$\mu(n) = 6(k+1)$$

Beispiele:

$k = 0$: liefert uns $\mathcal{F}_4$ bzw. $\mathcal{F}_5$ mit $\mu(4) = \mu(5) = 6$.

$k = 1$: es gibt 3 Möglichkeiten, eine Spitze zwischen $-\frac{1}{2}$ und 0 hinzuzufügen:

$$-\frac{2}{5},\ -\frac{1}{3}\ (\mathcal{F}_6),\ -\frac{1}{4}\ (\mathcal{F}_8)$$

In allen Fällen ist $\mu(n) = 12$.

$k = 2$: z.B. $-\frac{1}{4},\ -\frac{1}{5}\ (\mathcal{F}_{10}),\ \mu(10) = 18$.

$k = 3$: z.B. $-\frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{6}\ (\mathcal{F}_{12}),\ \mu(12) = 24$.

$k = 4$: z.B. $-\frac{2}{5},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{5},\ -\frac{1}{7}\ (\mathcal{F}_{25}),\ \mu(25) = 30$.

$k = 5$: z.B. $-\frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{6},\ -\frac{1}{8},\ -\frac{1}{9}\ (\mathcal{F}_{18}),\ \mu(18) = 36$.

Es ergibt sich eine notwendige Bedingung für die Existenz eines glatten Fundamentalbereichs durch:

Behauptung: $\epsilon_\rho = 0 \Longleftrightarrow 6|\mu$

Denn: Es sei $\epsilon_\rho = 0$ (siehe 1.1).

1.Fall: $9|n \Longrightarrow 6|\mu$

2.Fall: $\exists p|n: \ p \equiv 2 \bmod 3 \Longrightarrow p+1 \equiv 0 \bmod 6 \Longrightarrow 6|\mu$

Es sei $\epsilon_\rho \neq 0$, dann ist

$$n = 3^a p_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r}, \ a = 0 \text{ oder } 1, \ p_i \equiv 1 \bmod 3, \ i = 1 \dots r,$$

woraus folgt, daß $3 \not| \mu$.

Also findet sich ein glatter Fundamentalbereich höchstens für $\epsilon_\rho = 0$. In diesem Fall läßt sich aber die Größe e' des zugehörigen Erzeugendensystems leicht angeben.
Wenn zwischen $-\frac{1}{2}$ und 0 k Spitzen liegen, so ist $\mathcal{F}_n$ begrenzt durch $2(k+2)$ h-Geraden.

1.Fall: $\epsilon_i = 0$

Je zwei begrenzende h-Geraden sind durch eine Randsubstitution miteinander verbunden, also

$$e' = k + 2 = 1 + \frac{\mu}{6}$$

2.Fall: $\epsilon_i \neq 0$

Es gibt ϵ_i begrenzende h-Geraden, die durch eine Randsubstitution auf sich selbst abgebildet werden, also

$$e' = \epsilon_i + \frac{2(k+2) - \epsilon_i}{2} = 1 + \frac{\epsilon_i}{2} + \frac{\mu}{6}$$

Beide Ergebnisse stimmen mit unserer Vermutung überein.

Ich fasse zusammen:

Vermutung 1: $\Gamma_0(n)$ besitzt genau dann einen glatten Fundamentalbereich $\mathcal{F}_n$, wenn $\epsilon_\rho = 0$ ist. In diesem Fall hat $\mathcal{F}_n$ zwischen $-\frac{1}{2}$ und 0 genau $\frac{\mu}{6} - 1$ Spitzen (die gleiche Anzahl natürlich zwischen 0 und $\frac{1}{2}$). Die zugehörigen Randsubstitutionen bilden ein minimales Erzeugendensystem.

Vermutung 2: In der freien Zerlegung von $\Gamma_0(n)$ hat die freie Gruppe F_k den Rang

$$k = \sigma_\infty + 2g - 1$$

und damit hat ein minimales Erzeugendensystem die Mächtigkeit

$$\begin{aligned} e &= \sigma_\infty + 2g - 1 + \epsilon_i + \epsilon_\rho \\ &= 1 + \frac{\epsilon_i}{2} + \frac{\epsilon_\rho}{3} + \frac{\mu}{6}\,. \end{aligned}$$

Die Größen k und e in der nachfolgenden Tabelle beruhen auf Vermutung 2.

n	μ	ϵ_ρ	ϵ_i	σ_∞	g	k	e	n	μ	ϵ_ρ	ϵ_i	σ_∞	g	k	e
1	1	1	1	1	0	0	2	41	42	0	2	2	3	7	9
2	3	0	1	2	0	1	2	42	96	0	0	8	5	17	17
3	4	1	0	2	0	1	2	43	44	2	0	2	3	7	9
4	6	0	0	3	0	2	2	44	72	0	0	6	4	13	13
5	6	0	2	2	0	1	3	45	72	0	0	8	3	13	13
6	12	0	0	4	0	3	3	46	72	0	0	4	5	13	13
7	8	2	0	2	0	1	3	47	48	0	0	4	3	9	9
8	12	0	0	4	0	3	3	48	96	0	0	12	3	17	17
9	12	0	0	4	0	3	3	49	56	2	0	8	1	9	11
10	18	0	2	4	0	3	5	50	90	0	2	12	2	15	17
11	12	0	0	2	1	3	3	51	72	0	0	4	5	13	13
12	24	0	0	6	0	5	5	52	84	0	0	6	5	15	15
13	14	2	2	2	0	1	5	53	54	0	2	2	4	9	11
14	24	0	0	4	1	5	5	54	108	0	0	12	4	19	19
15	24	0	0	4	1	5	5	55	72	0	0	4	5	13	13
16	24	0	0	6	0	5	5	56	96	0	0	8	5	17	17
17	18	0	2	2	1	3	5	57	80	2	0	4	5	13	15
18	36	0	0	8	0	7	7	58	90	0	2	4	6	15	17
19	20	2	0	2	1	3	5	59	60	0	0	2	5	11	11
20	36	0	0	6	1	7	7	60	144	0	0	12	7	25	25
21	32	2	0	4	1	5	7	61	62	2	2	2	4	9	13
22	36	0	0	4	2	7	7	62	96	0	0	4	7	17	17
23	24	0	0	2	2	5	5	63	96	0	0	8	5	17	17
24	48	0	0	8	3	9	9	64	96	0	0	12	3	17	17
25	30	0	2	6	0	5	7	65	84	0	4	4	5	13	17
26	42	0	2	4	2	7	9	66	144	0	0	8	9	25	25
27	36	0	0	6	1	7	7	67	68	2	0	2	5	11	13
28	48	0	0	6	2	9	9	68	108	0	0	6	7	19	19
29	30	0	2	2	2	5	7	69	96	0	0	4	7	17	17
30	72	0	0	8	3	13	13	70	144	0	0	8	9	25	25
31	32	2	0	2	2	5	7	71	72	0	0	2	6	13	13
32	48	0	0	8	1	9	9	72	144	0	0	16	5	25	25
33	48	0	0	4	3	9	9	73	74	2	2	2	5	11	15
34	54	0	2	4	3	9	11	74	114	0	2	4	8	19	21
35	48	0	0	4	3	9	9	75	120	0	0	12	5	21	21
36	72	0	0	12	1	13	13	76	120	0	0	6	8	21	21
37	38	2	2	2	2	5	9	77	96	0	0	4	7	17	17
38	60	0	0	4	4	11	11	78	168	0	0	8	11	29	29
39	56	2	0	4	3	9	11	79	80	2	0	2	6	13	15
40	72	0	0	8	3	13	13	80	144	0	0	12	7	25	25

1.5 Normalisator

Wie bereits in I.6 gesagt, liefert uns der Normalisator von $\Gamma_0(n)$ in einer Gruppe von reellen Matrizen mit positiver Determinante eine Menge von gebrochen-linearen Transformationen, die auf $\mathcal{F}_n$ bzw. auf $\mathbb{H}^*/\Gamma_0(n)$ operieren. Damit erhält man ein Werkzeug zur Untersuchung der Modulfunktionen von $\Gamma_0(n)$.
Der Normalisator wird in [AL] mit Hilfe von Hecke-Operatoren berechnet. Wir setzen für $\Gamma_0(n)$:

$$S_t = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

und es sei q prim mit $q^\alpha \| n$ (d.h. $q^\alpha | n$ und $q^{\alpha+1} \not| \, n$):

$$V_q \in \Omega_{q^\alpha} = \left\{ A = \begin{pmatrix} aq^\alpha & b \\ cn & dq^\alpha \end{pmatrix} ;\ \det A = q^\alpha \right\}$$

ein beliebiges Element.

Der Normalisator $\mathcal{N}_n$ von $\Gamma_0(n)$ in $GL_2^+(\mathbb{R})$ wird über $\Gamma_0(n)$ erzeugt durch

i) $V_q,\ V_q^2 = I$ für jedes $q \ge 5,\ q|n$
ii) *a)* wenn $3\|n:\ V_3,\ V_3^2 = I$
  b) wenn $9\|n:\ \{V_3, S_3\},\ V_3^2 = S_3^3 = (V_3 S_3)^3 = I$
  (Ordnung 12)
  c) wenn $27|n:\ \{V_3, S_3\},\ V_3^2 = S_3^3 = I,\ S_3$ und $V_3 S_3 V_3$ kommutieren
  (Ordnung 18)
iii) wenn $2^\lambda \| n$ $(\lambda \ge 1)$, $\mu = \min(3, [\frac{\lambda}{2}])$, $\nu = 2^\mu$, dann
  a) wenn $\lambda = 1:\ V_2,\ V_2^2 = I$
  b) wenn $\lambda = 2\mu:\ \{V_2, S_\nu\},\ V_2^2 = S_\nu^\nu = (V_2 S_\nu)^3 = I$
  (Ordnung $6, 24, 96$ für $\nu = 2, 4, 8$)
  c) wenn $\lambda > 2\mu:\ \{V_2, S_\nu\},\ V_2^2 = S_\nu^\nu = I, S_\nu$ und $V_2 S_\nu V_2$ kommutieren
  (Ordnung $2\nu^2$) .

Die Untergruppe des Normalisators, die von den V_q, q prim, $q|n$ erzeugt wird, nennt man den *„involutorischen Normalisator“*. In diesem hat $\Gamma_0(n)$ den Index 2^r, wenn r die Anzahl der verschiedenen Primteiler von n ist. Die zugehörigen Restklassen sind gegeben durch (siehe [CN]):

$$\Omega_e = \left\{ A = \begin{pmatrix} ae & b \\ cn & de \end{pmatrix} ;\ \det(A) = e \right\} \qquad \text{für } e\|n\ .$$

Im Fall $e = n$ können wir als Vertreter $W_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ n & 0 \end{pmatrix} \in \Omega_n$ wählen. W_n wird bezeichnet als *„Fricke-Involution“*.

Der Normalisator wird ausführlicher in Kapitel IV behandelt.

2 Modulfunktionen für $\Gamma_0(n)$, Konstruktion nach einem Satz von Newman

2.1 Allgemeines

In I.4 und I.5 haben wir gesehen:

1. Die Modulfunktionen für $\Gamma_0(n)$ bilden den Körper $K_{\Gamma_0(n)}$.
2. $K_{\Gamma_0(n)}/K_\Gamma$ ist algebraisch vom Grad $(\Gamma : \Gamma_0(n)) = \mu(n) = n \prod\limits_{p|n} (1 + \frac{1}{p})$.
3. $K_{\Gamma_0(n)}$ wird über K_Γ erzeugt von der Transformierten J_{M_0}, die wir ab jetzt J_n nennen werden: $J_n(\tau) = J(n\tau)$.
$$K_{\Gamma_0(n)} = K_\Gamma(J_n) = \mathbb{C}(J, J_n)\ .$$

4. Genau in den Fällen, in denen das Geschlecht von $\Gamma_0(n)$ bzw. das Geschlecht von $K_{\Gamma_0(n)} = 0$ ist, gibt es eine Modulfunktion A_n der Ordnung 1 und diese erzeugt $K_{\Gamma_0(n)}$ direkt über $\mathbb{C}$:

   $$K_{\Gamma_0(n)} = \mathbb{C}(A_n)\ .$$

   Dies tritt ein in den folgenden Fällen (siehe III.1):

   $$g(n) = 0 \Longleftrightarrow n \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,13,16,18,25\}$$

   Die Erzeugenden A_n werden in Kapitel III berechnet.

2.2 Der Satz von Newman [N1],[N2]

Morris Newman konstruiert in [N1] und [N2] Modulfunktionen für $\Gamma_0(n)$ mit Hilfe der Dedekindschen η-Funktion und tatsächlich lassen sich alle der in 2.1. genannten Erzeugenden A_n auf diese Weise gewinnen.

Die η-Funktion, definiert durch

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n\geq 1}(1-q^n), \qquad q = e^{2\pi i\tau}$$

ist eine Modulform vom Gewicht $-\frac{1}{2}$, sie hat keine Nullstelle und keinen Pol in $\mathbb{H}$ und verschwindet auf $\mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$. Ihr Transformationsverhalten ist gegeben durch

$$\eta(A\tau) = \epsilon(A)(-i(c\tau+d))^{\frac{1}{2}}\eta(\tau), \qquad A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right),\ c \geq 0\ .$$

wobei $\epsilon(A)$ eine 24te Einheitswurzel ist

$$\epsilon(A) = e^{\pi i\alpha(A)}, \qquad \alpha(A) = s(a,c) - \frac{a+d}{12c}\ .$$

$s(a,c)$ bezeichnet eine Dedekindsche Summe. Diese werden ausführlich in [RG] behandelt; wir wollen hier nur die Definition angeben.

Es seien $h,k \in \mathbb{Z}$, $(h,k)=1$, $k \geq 1$, dann ist

$$s(h,k) = \sum_{\mu=1}^{k} \left(\left(\frac{h\mu}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{\mu}{k}\right)\right)$$

wobei

$$((x)) = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2} & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

In den meisten Fällen können wir $\epsilon(A)$ mit Hilfe folgender Formel berechnen:

$$\alpha(A) \equiv \begin{cases} -\frac{1}{12}c(a+d) + \frac{3}{4}(c+1) + \frac{1}{2}c\left(\frac{a}{c}\right) \text{ mod } 2,\ (c,6)=1 & c > 0 \\ \frac{1}{12}a(c-b-3) - \frac{1}{2}(1-\left(\frac{c}{a}\right)) \text{ mod } 2,\ (a,6)=1 & a,c > 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Insbesondere ist

$$\begin{aligned} \eta(T\tau) &= e^{\frac{\pi i}{12}}\,\eta(\tau)\ , & T &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \\ \eta(S\tau) &= (-i\tau)^{\frac{1}{2}}\,\eta(\tau), & S &= \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\ . \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\phi_\delta(\tau) = \frac{\eta(\delta\tau)}{\eta(\tau)} \ .$$

Die Funktionen ϕ_δ für $\delta | n$ sind die Bausteine, mit denen Newman Modulfunktionen für $\Gamma_0(n)$ konstruiert. Es bezeichne $v(s)$ die Bewertung einer Modulfunktion für $\Gamma_0(n)$ an der Stelle $s \in \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ gemessen in der zugehörigen uniformisierenden Variablen (siehe II.4), die für s gegeben ist durch

$$e^{\frac{2\pi i}{\kappa(s)} A^{-1}\tau}$$

wobei $\kappa(s)$ die Fächerweite der Spitze s von $\Gamma_0(n)$ bezeichnet, und $A \in \Gamma$ so ist, daß $A(i\infty) = s$.

Satz 29 (Newman) *Sei $n > 1$, $r_\delta \in \mathbb{Z}$ für alle positiven Teiler δ von n und $r_1 = 0$, außerdem*

$$\begin{array}{rll} i) & v(i\infty) = \frac{1}{24} \sum\limits_{\delta | n} (\delta - 1) r_\delta & \in \mathbb{Z} \\ ii) & v(0) \ \ = \frac{1}{24} \sum\limits_{\delta | n} (\frac{n}{\delta} - n) r_\delta & \in \mathbb{Z} \\ iii) & \prod\limits_{\delta | n} \delta^{r_\delta} \ \textit{ist ein Quadrat in } \mathbb{Z} & \end{array}$$

dann ist

$$g = \prod_{\delta | n} \phi_\delta^{r_\delta} = \prod_{\delta | n} \left(\frac{\eta(\delta\tau)}{\eta(\tau)} \right)^{r_\delta}$$

eine Modulfunktion für $\Gamma_0(n)$.

Für den Beweis brauchen wir zunächst ein Lemma

Lemma 1 *Es sei $\Gamma_1 \leq \Gamma$ eine Untergruppe und*

$$\Gamma_1^{(m)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1; \ (a, m) = 1 \right\} \ ,$$

außerdem gelte

$$\exists k: \ (k, m) = 1, \ T^k \in \Gamma_1 \ .$$

Dann hat Γ_1 ein Erzeugendensystem, das nur aus Substitutionen aus $\Gamma_1^{(m)}$ besteht.

Beweis: Sei

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1$$

dann ist

$$T^{kx} M = \begin{pmatrix} 1 & kx \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + xkc & * \\ & * \end{pmatrix}$$

Wegen $(a, c) = 1$ und $(k, m) = 1$ kann x so bestimmt werden, daß $(a + xtc, m) = 1$. Mit diesem x ist dann

$$T^{kx} M = M_0 \in \Gamma_1^{(m)}$$

also ist

$$M = T^{-kx} M_0$$

ein Produkt von Substitutionen aus $\Gamma_1^{(m)}$. ■

Beweis (Satz): Aufgrund des Lemmas genügt es, die Invarianz von g für Substitutionen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ nc & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n) \qquad \text{mit } (a, 6) = 1, \ a, nc > 0$$

zu zeigen. Es gilt

$$\delta A\tau = \delta \begin{pmatrix} a & b \\ nc & d \end{pmatrix} \tau = \begin{pmatrix} a & \delta b \\ \frac{n}{\delta}c & d \end{pmatrix} \delta\tau = A_\delta \tau$$

also

$$\begin{aligned} \phi_\delta(A\tau) &= \frac{\eta(\delta A\tau)}{\eta(A\tau)} \\ &= \frac{\eta(A_\delta \delta\tau)}{\eta(A\tau)} \\ &= \frac{\epsilon(A_\delta)(-i(\frac{n}{\delta}c\delta\tau + d))^{\frac{1}{2}}\eta(\delta\tau)}{\epsilon(A)(-i(nc\tau + d))^{\frac{1}{2}}\eta(\tau)} \\ &= e^{-\pi i(\alpha(A_\delta)-\alpha(A))}\phi_\delta(\tau) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} g(A\tau) &= \prod_{\delta|n} \phi_\delta(A\tau)^{r_\delta} \\ &= \prod_{\delta|n} \left(\frac{\eta(A_\delta\delta\tau)}{\eta(A\tau)}\right)^{r_\delta} \\ &= e^{-\pi i\lambda} g(\tau) \end{aligned}$$

wobei

$$\lambda = \sum_{\delta|n} (\alpha(A_\delta) - \alpha(A)) r_\delta \ .$$

Wir verwenden die Formel $(*)$ für $(a, 6) = 1$:

$$\begin{aligned} \alpha(A_\delta) - \alpha(A) &= \frac{1}{12}a(\frac{n}{\delta}c - \delta b - 3) - \frac{1}{2}(1 - \left(\frac{\frac{n}{\delta}c}{a}\right)) - \frac{1}{12}a(nc - b - 3) - \frac{1}{2}(1 - \left(\frac{nc}{a}\right)) \\ &= \frac{1}{12}ac(\frac{n}{\delta} - n) - \frac{1}{12}ab(\delta - 1) + \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{n}{\delta}c}{a}\right)(1 - \left(\frac{\delta}{a}\right)) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \lambda &= 2ac\, v(0) - 2ab\, v(i\infty) + \frac{1}{2}\sum_{\delta|n} \left(\frac{\frac{n}{\delta}c}{a}\right)(1 - \left(\frac{\delta}{a}\right)) \\ &\equiv \frac{1}{2}\sum_{\delta|n}(1 - \left(\frac{\delta}{a}\right)) \bmod 2 \end{aligned}$$

wegen *i)* und *ii)*. Es ergibt sich weiter

$$e^{-\pi i\lambda} = \prod_{\delta|n} e^{-\frac{1}{2}\pi i(1-(\frac{\delta}{a}))r_\delta} = \prod_{\delta|n} \left(\frac{\delta}{a}\right)^{r_\delta} = 1$$

wegen *iii)*. ■

Als nächstes berechnen wir die Bewertungen $v(s)$ und die Funktionswerte einer solchen Funktion g an einer Spitze s.

Sei s eine beliebige Spitze:

$s = i\infty$: Offensichtlich ist

$$v(i\infty) = \frac{1}{24}\sum_{\delta|n}(\delta - 1) r_\delta \qquad \text{gemessen in } e^{2\pi i\tau} \ .$$

$s = 0$: Es ist mit $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

$$\phi_\delta(S\tau) = \frac{\eta(\delta S\tau)}{\eta(S\tau)} = \frac{\eta(S\frac{\tau}{\delta})}{\eta(S\tau)} = \delta^{-\frac{1}{2}}\frac{\eta(\frac{\tau}{\delta})}{\eta(\tau)} .$$

Damit erhalten wir

$$v(0) = \frac{1}{24}\sum_{\delta|n}(\frac{n}{\delta} - n)r_\delta \qquad \text{gemessen in } e^{\frac{2\pi i}{n}S\tau} .$$

$s = \dfrac{a}{b}$, $(a,b) = 1$, $b > 0$: Die Transformation $W_s = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ (c, d so gewählt, daß $ad - bc = 1$) bildet $i\infty$ auf s ab.
Es ist

$$\begin{aligned} \delta W_s\tau = \left(\begin{smallmatrix} \delta a & \delta c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)\tau &= \left(\begin{smallmatrix} \delta_0 a & c' \\ b_0 & d' \end{smallmatrix}\right)\frac{D\tau + \delta cd' - c'd}{\delta_0} \\ &= W_{0s}\frac{D\tau + \delta cd' - c'd}{\delta_0} \end{aligned}$$

wobei $D = (\delta, b)$, $\delta = D\delta_0$, $b = Db_0, \delta_0 ad' - b_0c' = 1$,
also

$$\phi_\delta(W_s\tau) = \frac{\eta(\delta W_s\tau)}{\eta(W_s\tau)} = \frac{\eta(W_{0s}\frac{D\tau+\delta cd'-c'd}{\delta_0})}{\eta(W_s\tau)}$$

und mit dem Transformationsverhalten von η

$$\phi_\delta(W_s\tau) = \frac{\epsilon(W_{0s})}{\epsilon(W_s)}\left(\frac{1}{\delta_0}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\eta\left(\frac{D\tau+\delta cd'-c'd}{\delta_0}\right)}{\eta(\tau)}$$

und wir erhalten für g:

$$v(\frac{a}{b}) = \frac{1}{24}\sum_{\delta|n}\frac{\kappa_n(\frac{a}{b})}{\delta}((\delta, b)^2 - \delta)r_\delta \qquad \text{gemessen in } e^{\frac{2\pi i}{\kappa_n(\frac{a}{b})}W_s^{-1}\tau}$$

und als Funktionswert im Fall $v(\frac{a}{b}) = 0$:

$$\begin{aligned} g(\frac{a}{b}) &= \prod_{\delta|n}\left(\frac{\epsilon(W_{0s})}{\epsilon(W_s)}\left(\frac{1}{\delta_0}\right)^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i(\delta cd'-c'd)\frac{1}{24\delta_0}}\right)^{r_\delta} \\ \left|g(\frac{a}{b})\right| &= \prod_{\delta|n}\left(\frac{1}{\delta_0}\right)^{\frac{1}{2}r_\delta} . \end{aligned}$$

Falls der Wert $g(\frac{a}{b})$ ganzzahlig ist, besteht er also nur aus Teilern von δ und damit nur aus Teilern von n.

Die Koeffizienten einer Funktion g lassen sich leicht mit Hilfe folgender Rekursionsformel berechnen:

Satz 30 *Seien $\delta_i \in \mathbb{N}$ paarweise verschieden, $R_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq N$ und*

$$\begin{aligned} f_i &= \prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^{\delta_i n})^{R_i} \\ f &= \prod_{i=1}^{\infty} f_i = \sum_{n=0}^{\infty} q(n)x^n \end{aligned}$$

dann lassen sich die Koeffizienten $q(n)$ berechnen durch

$$\begin{aligned} & q(0) = 1 \\ n \geq 1: \qquad & n\,q(n) = -\sum_{k=1}^{n} \lambda(k)\,q(n-k),\;\; \lambda(n) = \sum_{i=1}^{N} R_i\delta_i\,\sigma(\frac{n}{\delta_i}) \end{aligned}$$

wobei σ die Teilersumme bezeichnet und $\sigma(x) = 0$ gesetzt wird, falls x nicht ganz ist.

Anwendung auf g:

$$g = \prod_{\delta|n} \phi_\delta^{r_\delta} = q^{v(i\infty)} \prod_{n>=1} \prod_{\delta|n} \frac{(1-q^{\delta n})}{(1-q^n)} = q^{v(i\infty)} \cdot f \qquad\qquad q = e^{2\pi i\tau}\ .$$

f hat die Form aus Satz 30, damit lassen sich die Koeffizienten von f, also die von g berechnen.

Kapitel III

Vollständige Untersuchung von $\Gamma_0(n)$ im Falle Geschlecht = 0 und Berechnung der erzeugenden Modulfunktionen

1 Erläuterungen zur Berechnung und Beispiele

Die Berechnung der Größen, die $\Gamma_0(n)$ direkt betreffen, wie μ, σ_∞ etc. oder der Normalisatoren, ist in Kapitel II.1 erläutert.

1.1 Die Berechnung der Erzeugenden A_n, die Werte von A_n an den Spitzen

Die erzeugenden Modulfunktionen A_n im Fall Geschlecht $g(n) = 0$, d.h. $K_{\Gamma_0(n)} = \mathbb{C}(A_n)$ lassen sich alle mit Hilfe des Satzes von Newman (II.2 Satz 29) berechnen.
Eine auf diese Weise konstruierte Modulfunktion (für $\Gamma_0(n)$)

$$g = \prod_{\delta|n} \phi_\delta^{r_\delta} = \prod_{\delta|n} \left(\frac{\eta(\delta\tau)}{\eta(\tau)}\right)^{r_\delta}$$

ist in $\mathbb{H}$ endlich und $\neq 0$, da η diese Eigenschaft hat. Nullstellen und Pole werden also an Punkten $\in \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ und damit nur an Spitzen eines Fundamentalbereiches $\mathcal{F}_n$ von $\Gamma_0(n)$ angenommen.
Sei $\mathcal{S}_n$ ein maximales System paarweise inäquivalenter Spitzen von $\mathcal{F}_n$. Damit haben wir:

$$\begin{array}{lclllrl} g \text{ hat die Ordnung } 1 & \Longleftrightarrow & \exists_1 & s' \in \mathcal{S}_n & : & v(s') & = & 1 \\ \text{und ist damit erzeugend} & & \exists_1 & s'' \in \mathcal{S}_n & : & v(s'') & = & -1 \\ & & \forall & s \in \mathcal{S}_n & : & v(s) & = & 0 \\ & & & s \neq s', s'' & & & & \end{array}$$

Wir beschränken uns darauf, Funktionen zu ermitteln, die ihren Pol bei $i\infty$ haben, d.h. Funktionen mit $v(i\infty) = -1$ (die q-Entwicklung von g fängt dann mit $\frac{1}{q}$ an), und verwenden, daß für eine beliebige Modulfunktion gilt (I.4 Satz 21):

$$\sum_{s \in \mathcal{S}_n} v(s) = 0 \ .$$

Wenn wir die Nullstelle von g in $\mathcal{F}_n$ bei der Spitze $s' \neq i\infty$ festlegen, erhalten wir das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} v(s') &= 1 \\ v(s) &= 0 \qquad\qquad \text{für } s \in \mathcal{S}_n \setminus \{i\infty, s'\} \end{aligned}$$

in den Variablen r_δ mittels der Formeln (siehe III.2):

$$\begin{aligned} v(0) &= \tfrac{1}{24} \sum_{\delta|n} (\tfrac{n}{\delta} - n) r_\delta \\ 0 \neq s = \tfrac{a}{b} : \quad v(\tfrac{a}{b}) &= \tfrac{1}{24} \sum \tfrac{\kappa_n(\frac{a}{b})}{\delta} ((\delta, b)^2 - \delta) r_\delta \ . \end{aligned}$$

Unter den Funktionen der Ordnung 1, die wir auf diese Weise erhalten, wählen wir als A_n diejenige mit $v(0) = 1$, da diese Normierung in allen Fällen möglich ist.

1.Beispiel: $n = 8$

$\Gamma_0(8)$ hat 4 Spitzen : $i\infty$, 0 , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$
mit den Weiten κ_8 : 1 , 8 , 2 , 1

Es ist

$$\begin{aligned} v(0) &= \frac{1}{24}(-4r_2 - 6r_4 - 7r_8) \\ v(\frac{1}{2}) &= \frac{1}{24} \sum_{\delta|n} \frac{2}{\delta}((\delta, 2)^2 - \delta) r_\delta \\ &= \frac{1}{24}(2r_2 + 0r_4 - r_8) \\ v(\frac{1}{4}) &= \frac{1}{24} \sum_{\delta|n} \frac{1}{\delta}((\delta, 4)^2 - \delta) r_\delta \\ &= \frac{1}{24}(r_2 + 3r_4 + r_8) \ . \end{aligned}$$

Wir erhalten die drei LGSe:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{rrr|rrr} -4 & -6 & -7 & 24 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 24 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 24 \end{array}\right) \\ \longleftrightarrow \quad &\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -2 & 10 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -4 & -8 \end{array}\right) \end{aligned}$$

und die Bedingung aus Newman's Satz:

$$\begin{aligned} &\prod_{\delta|n} \delta^{r_\delta} = 2^{r_2} 4^{r_4} 8^{r_8} \quad \text{ist Quadrat in } \mathbb{Z} \\ \Longleftrightarrow \quad & r_2 + r_4 \text{ ist gerade} \end{aligned}$$

ist in allen Fällen erfüllt.
Es ist

$$g_1 = \phi_2^{-2} \phi_4^{2} \phi_8^{-4} = \frac{\eta(\tau)^4 \eta(4\tau)^2}{\eta(2\tau)^2 \eta(8\tau)^4}$$

unsere Erzeugende A_8 mit $v(0) = 1$.

Die Funktionen g_i haben alle den gleichen Pol (bei $i\infty$) und eine normierte q-Entwicklung, also sind sie durch einfache Translationen ineinander überführbar.
Nach der Rekursionsformel aus III.2 ist

$$g_i = \frac{1}{q} + (r_2 + r_4 + r_8) + O(q) \ .$$

Damit erhalten wir die linearen Beziehungen unter den g_i durch Normierung auf

$$g = \frac{1}{q} + 0 + O(q)$$

$$g_1 + 4 = g_2 - 4 = g_3$$

und ganz leicht die Funktionswerte von $A_8 = g_1$ an den Spitzen

$$\begin{aligned} A_8(\frac{1}{2}) &= -8 \\ A_8(\frac{1}{4}) &= -4 \ . \end{aligned}$$

Probleme tauchen auf, wenn inäquivalente Spitzen gleichen Nenner haben:

$$s = \frac{a}{b}, \ s' = \frac{a'}{b}$$

in diesem Fall ist

$$\kappa_n(s) = \kappa_n(s') \implies v(s) = v(s') \ .$$

Wenn wir nun $v(s) = 1$ vorschreiben, erhalten wir eine Funktion der Ordnung ≥ 2, d.h. eine Funktion der Ordnung 1 mit $v(s) = 1$ ist in diesem Fall mit unserer Methode nicht konstruierbar.
Das tritt immer dann auf, wenn $\sigma_\infty(n) > \sigma(n)$, also in den Fällen $n = 9, 16, 18, 25$.

2.Beispiel: $n = 16$

$\Gamma_0(16)$ hat 6 Spitzen : $i\infty$, 0 , $\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$
mit den Weiten κ_{16} : 1 , 16 , 4 , 1 , 1

Es ist

$$\begin{aligned} v(0) &= \frac{1}{24}(-8r_2 - 12r_4 - 14r_8 - 15r_{16}) \\ v(\frac{1}{2}) &= \frac{1}{24}(4r_2 + 0r_4 - 2r_8 - 3r_{16}) \\ v(\pm\frac{1}{4}) &= \frac{1}{24}(r_2 + 3r_4 + r_8 + 0r_{16}) \\ v(\frac{1}{8}) &= \frac{1}{24}(r_2 + 3r_4 + 7r_8 + 3r_{16}) \ . \end{aligned}$$

Wir erhalten die drei(!) LGSe:

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrr} -8 & -12 & -14 & -15 & 24 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & -3 & 0 & 24 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 3 & 0 & 0 & 24 \end{array}\right)$$

$$\longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{rrrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

und die Bedingung

$$\begin{aligned} & \prod_{\delta|n} \delta^{r_\delta} = 2^{r_2}4^{r_4}8^{r_8}16^{r_{16}} \text{ ist Quadrat} \\ \iff \; & r_2 + r_8 \text{ ist gerade} \end{aligned}$$

ist in allen Fällen erfüllt.
Es ist

$$g_1 = \phi_2^{-1}\phi_8\,\phi_{16}^{-2} = \frac{\eta(\tau)^2\eta(8\tau)}{\eta(2\tau)\eta(16\tau)^2)}$$

unsere Erzeugende mit $v(0) = 1$.
Wie im 1.Beispiel berechnen wir

$$g_1 + 2 = g_2 - 2 = g_3$$

und damit

$$\begin{aligned} A_{16}(\frac{1}{2}) &= -4 \\ A_{16}(\frac{1}{8}) &= -2\ . \end{aligned}$$

Für $A_{16}(\pm\frac{1}{4})$ müssen wir die Formel aus III.2.2 bemühen:

$$\begin{aligned} A_{16}(\frac{1}{4}) &= 2\sqrt{2}e^{-\frac{3}{4}\pi i} = 2(-1-i) \\ A_{16}(-\frac{1}{4}) &= 2\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i} = 2(-1+i)\ . \end{aligned}$$

1.2 Die Darstellung von J und $J-1728$ durch die A_n, die Werte von A_n an den Stellen τ_ρ und τ_i.

Die Funktion J (siehe I.2.3) hat als Modulfunktion für $\Gamma_0(n)$ die Ordnung $\mu(n)$.
Damit hat J eine Darstellung:

$$J = \frac{u(A_n)}{v(A_n)}, \qquad u, v \text{ Polynome mit } \deg(u), \deg(v) \leq \mu(n)\ .$$

J und A_n haben den ersten Koeffizienten 1 in ihrer q-Entwicklung, sodaß wir u, v o.B.d.A. als ebenso normiert annehmen können.
Der Nenner v bestimmt sich aus den Polen von J. Diese liegen genau an den Spitzen s von $\mathcal{F}_n$ mit den jeweiligen Vielfachheiten $\kappa_n(s)$. Es ist $\kappa_n(i\infty) = 1$.
Daraus ergibt sich:

$$v(X) = \prod_{s\in\mathcal{S}_n\setminus\{i\infty\}} (X - A_n(s))^{\kappa_n(s)}, \qquad \deg(v) = \mu(n) - 1\ .$$

v läßt sich daher mit dem Wissen aus dem vorigen Abschnitt sofort hinschreiben. Mehr Probleme bereitet der Zähler.
Der Zähler u bestimmt sich aus den Nullstellen von J. Diese liegen genau an den zu ρ äquivalenten Punkten τ_ρ von $\mathcal{F}_n$. Wenn τ_ρ Fixpunkt von $\Gamma_0(n)$ ist, hat J dort eine einfache Nullstelle, sonst eine dreifache Nullstelle (siehe I.3.3).
Damit läßt sich u zerlegen:

$$u = u_1 \cdot u_2^3, \qquad \deg(u_1) = \epsilon_\rho(n),\ \deg(u_2) = \alpha_\rho(n),\ \deg(u) = \mu(n)$$

und die Nullstellen von u sind die Funktionswerte von A_n an den Stellen τ_ρ.

Analog ergibt sich für $J-1728$:

$$J - 1728 = \frac{u'(A_n)}{v'(A_n}$$

mit

$$\begin{aligned} v' &= v \\ u' &= u'_1 \cdot {u'_2}^2 \qquad \deg(u'_1) = \epsilon_i(n),\ \deg(u'_2) = \alpha_i(n),\ \deg(u') = \mu(n) \end{aligned}$$

und die Nullstellen von u' sind die Funktionswerte von A_n an den Stellen τ_i

Zunächst werden die Fälle „n prim“ behandelt. Die Berechnung erfolgt durch Koeffizientenvergleich. Es empfiehlt sich im Fall $\epsilon_\rho = 0$ die Darstellung von J zu berechnen, im Fall $\epsilon_i = 0$ die von $J-1728$, um die auftretende Variablenzahl minimal zu halten. Durch elementare Rechnung läßt sich dann aus der einen Darstellung die andere gewinnen.
Der einzige auftretende Fall mit $\epsilon_\rho \neq 0$ und $\epsilon_i \neq 0$ ist $n = 13$ und hat auch eine etwas trickreiche Rechnung erfordert.

1. Beispiel: $n = 5$

$\mathcal{F}_5$ hat die Spitzen $i\infty, 0$ der Weiten 1,5. Daraus ergibt sich als Nennerpolynom:

$$v(X) = X^5 \ .$$

Weiterhin ist $\epsilon_\rho(5) = 0,\ \alpha_\rho(5) = 2$, woraus für den Zähler u folgt:

$$u = u_2^3,\ \deg(u_2) = 2 \ .$$

Wir erhalten als Ansatz

$$J = \frac{(A_5^2 + x \cdot A_5 + y)^3)}{A_5^5} \ .$$

Der Koeffizientenvergleich läßt sich nun auf verschiedene Arten durchführen; die folgende hat sich in allen Fällen bewährt, da sie zu große Zahlen vermeidet und Gleichungssysteme in Diagonalgestalt liefert.
Es ist

$$\begin{aligned} A_5 &= \tfrac{1}{q} - 6 + 9q \ldots \\ A_5^{-1} &= q + 6q^2 \ldots \\ A_5^{-2} &= q^2 \ldots \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} J &= \frac{(A_5^2 + x \cdot A_5 + y)^3}{A_5^5} \\ &= A_5(1 + x \cdot A_5^{-1} + y \cdot A_5^{-2})^3 \\ &= (\frac{1}{q} - 6 + 9q \ldots)(1 + x \cdot q + (6x + y)q^2 \ldots)^3 \\ &= (\frac{1}{q} - 6 + 9q \ldots)(1 + 3x \cdot q + (18x + 3x^2 + 3y)q^2 \ldots) \\ &= \frac{1}{q} + (3x - 6) + (3x^2 + 3y + 9)q \ldots \end{aligned}$$

Wir erhalten (siehe Tabelle der Koeffizienten von J in II.2.3):

$$\begin{aligned} 3x - 6 = 744 &\iff x = 250 \\ 3x^2 + 3y + 9 = 196884 &\iff y = 3125 \end{aligned}$$

und $A_5(\tau_\rho)$ als Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} & z^2 + 250z + 3125 = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & z_{1/2} = 5^2(-5 \pm 2\sqrt{2}) \ . \end{aligned}$$

Nachdem die Primzahlfälle gelöst sind, können die anderen Fälle Schritt für Schritt ganz leicht gelöst werden. Wenn

$$J = \frac{u(A_n)}{v(A_n)}$$

bereits bekannt ist und p eine Primzahl, so ist A_n für $\Gamma_0(pn)$ eine Modulfunktion der Ordnung

$$w(n) = \frac{\mu(pn)}{\mu(n)} = \begin{cases} p & : p | n \\ p+1 & : p \not| n \end{cases}$$

A_n hat auf $\mathcal{F}_{pn}$ Pole bei den Spitzen s mit

$$s \overset{\Gamma_0(n)}{\sim} i\infty$$

der Vielfachheit

$$\frac{\kappa_{pn}(s)}{\kappa_n(s)} = \kappa_{pn}(s)$$

entsprechend die Nullstellen bei den Spitzen s mit

$$s \overset{\Gamma_0(n)}{\sim} 0$$

der Vielfachheit

$$\frac{\kappa_{pn}(s)}{\kappa_n(s)} = \frac{\kappa_{pn}(s)}{n} \ .$$

Damit ist

$$A_n = \frac{\prod\limits_{s \overset{\Gamma_0(n)}{\sim} 0} (A_{pn} - A_{pn}(s))^{\frac{\kappa_{pn}(s)}{n}}}{\prod\limits_{\substack{s \overset{\Gamma_0(n)}{\sim} i\infty \\ s \neq i\infty}} (A_{pn} - A_{pn}(s))^{\kappa_{pn}(s)}}$$

$$\text{Zählergrad} = w(n), \ \text{Nennergrad} = w(n) - 1 \ .$$

Durch Einsetzen in obige Gleichung für J erhält man das gewünschte Ergebnis:

$$J = \frac{\bar{u}(A_{pn})}{\bar{v}(A_{pn})} \ .$$

Wenn die Zerlegung von u in Linearfaktoren bekannt ist, erhält man die von $\bar{u}$ durch Zerlegung von Polynomen p-ten bzw. $(p+1)$-ten Grades.
Die gleiche Methode funktioniert natürlich auch für $J - 1728$, wobei ich diese Darstellung nur für $n = 2, 3, 4, 5, 7$ berechnet habe.
Durch Lösen von quadratischen und kubischen Gleichungen lassen sich also alle Zähler (außer $n = 13, 25$) vollständig zerlegen, was ich auch nur für die kleineren n durchgeführt habe.

2.Beispiel: $n = 9$

Wir gehen aus von $n = 3$:

$$\begin{array}{lllll}
\Gamma_0(3): & \text{Spitzen} & i\infty\ , & 0 & \\
 & \text{Weiten} & 1\ , & 3 & \\
\Gamma_0(9): & \text{Spitzen} & i\infty\ , & 0\ , & \pm\frac{1}{3} \\
 & \text{Weiten} & 1\ , & 9\ , & 1
\end{array}$$

Es ist

$$\begin{array}{cccl}
i\infty & \overset{\Gamma_0(3)}{\sim} & i\infty & \\
\pm\dfrac{1}{3} & \overset{\Gamma_0(3)}{\sim} & i\infty & \text{vermöge } \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \pm 3 & 1 \end{smallmatrix}\right) \\
0 & \overset{\Gamma_0(3)}{\sim} & 0 &
\end{array}$$

und daher

$$\begin{aligned}
A_3 &= \frac{(A_9 - A_9(0))^3}{(A_9 - A_9(\frac{1}{3}))(A_9 - A_9(-\frac{1}{3}))} \\
&= \frac{A_9^3}{A_9^2 + 9A_9 + 27}\ .
\end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned}
J &= \frac{(A_3 + 3^3)(A_3 + 3^5)^3}{A_3^3} \\
&= \frac{(A_9^3 + 3^3(A_9^2 + 3^2A_9 + 3^3))(A_9^3 + 3^5(A_9^2 + 3^2A_9 + 3^3))^3}{A_9^9(A_9^2 + 9A_9 + 27)} \\
&= \frac{(A_9 + 3^2)^3(A_9^3 + 3^5A_9^2 + 3^7A_9 + 3^8)^3}{A_9^9(A_9^2 + 9A_9 + 27)}\ .
\end{aligned}$$

Der Zähler ist über $\mathbb{Z}$ nicht weiter reduzierbar.

3.Beispiel: $n = 16$

Wir gehen aus von $n = 8$:

$$\begin{array}{lllllll}
\Gamma_0(8): & \text{Spitzen} & i\infty\ , & 0\ , & \frac{1}{2}\ , & \frac{1}{4} & \\
 & \text{Weiten} & 1\ , & 8\ , & 2\ , & 1 & \\
\Gamma_0(16): & \text{Spitzen} & i\infty\ , & 0\ , & \frac{1}{2}\ , & \pm\frac{1}{4}\ , & \frac{1}{8} \\
 & \text{Weiten} & 1\ , & 16\ , & 4\ , & 1\ , & 1
\end{array}$$

Es ist

$$\begin{array}{cccl}
i\infty & \overset{\Gamma_0(8)}{\sim} & i\infty & \\
\dfrac{1}{8} & \overset{\Gamma_0(8)}{\sim} & i\infty & \text{vermöge } \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{smallmatrix}\right) \\
0 & \overset{\Gamma_0(8)}{\sim} & 0 &
\end{array}$$

und daher

$$\begin{aligned}
A_8 &= \frac{(A_{16} - A_{16}(0))^2}{(A_{16} - A_{16}(\frac{1}{8}))} \\
&= \frac{A_{16}^2}{A_{16} + 2}\ .
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Gleichung

$$J = \frac{(A_8^4 + 2^8 A_8^3 + 5 \cdot 2^{10} A_8^2 + 2^{15} A_8 + 2^{16})^3}{A_8^8 (A_8 + 8)^2 (A_8 + 4)}$$

liefert wie im 2.Beispiel das gewünschte Ergebnis.

1.3 Die Darstellung der Transformierten J_n durch die A_n

Es ist $J_n(z) = J(nz)$ die Transformierte, die $K_{\Gamma_0(n)}$ über K_Γ erzeugt (siehe I.5):

$$K_{\Gamma_0(n)} = K_\Gamma(J_n) = \mathbb{C}(J, J_n) \ .$$

J_n ist eine Modulfunktion der Ordnung n für $\Gamma_0(n)$ (da die q-Entwicklung von J_n mit $\frac{1}{q^n}$ beginnt). Mit $A_n(z)$ ist auch $A_n(-\frac{1}{nz})$ eine Modulfunktion der Ordnung 1 für $\Gamma_0(n)$ (Fricke-Involution !) mit den gleichen Polen und Nullstellen wie $A_n(z)^{-1}$, also ist

$$A_n(z) A_n(-\frac{1}{nz}) = c = const.$$

Durch Einsetzen einer Spitze erhält man c, welches in allen Fällen positiv ist. Mit

$$J = \frac{u(A_n)}{v(A_n)}$$

erhält man

$$J(nz) = J(-\frac{1}{nz}) = \frac{u(A_n(-\frac{1}{nz}))}{v(A_n(-\frac{1}{nz}))} = \frac{u(\frac{c}{A_n(z)})}{v(\frac{c}{a_n(z)})} \ .$$

Beispiel: $n = 6$

$$A_6(z) A_6(-\frac{1}{6z}) = c$$

$$z = \frac{1}{2} \Longrightarrow c = A_6(\frac{1}{2}) A_6(-\frac{1}{3}) = 72$$

$$\begin{aligned} J &= \frac{(A_6 + 12)^3 (A_6^3 + 7 \cdot 6^2 A_6 + 3 \cdot 6^4 A_6 + 2 \cdot 6^5)^3}{A_6^6 (A_6 + 9)^3 (A_6 + 8)^2} \\ J_6 &= \frac{(2 \cdot 6^2 + 12 A_6)^3 (8 \cdot 6^6 + 28 \cdot 6^6 A_6 + 6^7 A_6^2 + 2 \cdot 6^5 A_6^3)^3}{64 \cdot 6^{12} A_6 (2 \cdot 6^2 + 9 A_6)^3 (2 \cdot 6^2 + 8 A_6)^2} \\ &= \frac{(A_6 + 6)^3 (A_6^3 + 18 A_6^2 + 84 A_6 + 96)^3}{A_6 (A_6 + 8)^3 (A_6 + 9)^2} \ . \end{aligned}$$

Mit diesen Gleichungen lassen sich jetzt weitere Funktionswerte der A_n berechnen (z.B. $A_n(\frac{\rho}{n}), A_n(\frac{i}{n})$).

1.4 Der Normalisator

Wenn M eine Substitution aus dem Normalisator $\mathcal{N}_n$ von $\Gamma_0(n)$ ist und $g \in K_{\Gamma_0(n)}$ eine Modulfunktion, dann ist

$$\tau \mapsto g(M\tau)$$

ebenfalls eine Modulfunktion für $\Gamma_0(n)$ der gleichen Ordnung, denn es gilt mit $A \in \Gamma_0(n)$

$$g(MA\tau) = g(AM\tau) = g(M\tau)\ .$$

Das bedeutet aber, daß $g(M\tau)$ eine gebrochen-lineare Transformation in $g(\tau)$ ist

$$g(M\tau) = \frac{\alpha g(\tau) + \beta}{\gamma g(\tau) + \delta}\ .$$

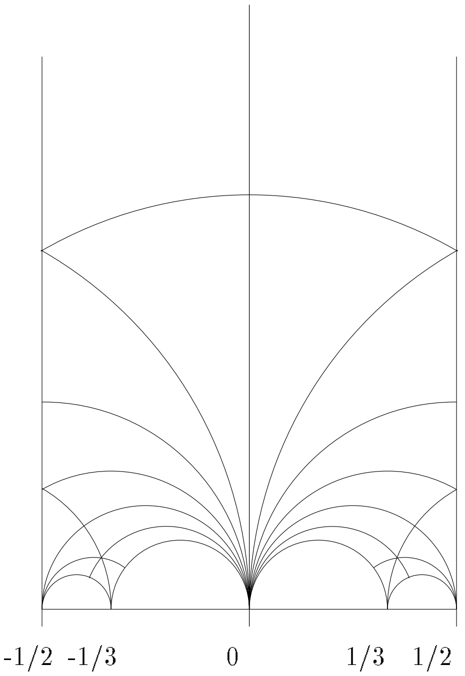
Wir können also Transformationen aus dem Normalisator gewissermaßen „herausziehen“. Die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gewinnt man, indem man z.B. für τ Spitzen einsetzt und vergleicht.
In den Ergebnissen im nächsten Abschnitt ist das getan für die jeweiligen Erzeugenden des Normalisators und die Fricke-Involution.

Eine Verwendung dieser Tatsachen ergibt sich, wenn wir die Punkte aus $\mathcal{F}_n$ bestimmen wollen, die auf von A_n auf $\mathbb{R}$ abgebildet werden.
Da gilt

$$\tau \in h(-\frac{1}{2}, \infty) \cup h(0, \infty) \Longrightarrow q = e^{2\pi i \tau} \in \mathbb{R}$$

und die q-Entwicklung von A_n nur Koeffizienten $\in \mathbb{Z}$ hat, ist A_n dort in jedem Fall reell. Dies gilt natürlich auch für $h(\frac{1}{2}, \infty)$ was aber nicht zu unseren $\mathcal{F}_n$ gehört.

Beispiel: $n = 6$



Anschaulich ist klar was passiert: wegen

$$A_6(-\frac{1}{2}) = -9,\ A_6(-\frac{1}{3}) = -8,\ A_6(0) = 0$$

ist anzunehmen, daß

$$\begin{array}{ll} A_6(h(-\frac{1}{2},\infty)) & = (-\infty,-9\,] \\ A_6(h(0,\infty)) & = [\,0,\infty) \\ A_6(h(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3})) & = [-9,-8\,] \\ A_6(h(0,-\frac{1}{2})) & = [-8,0\,] \end{array}$$

Für die Transformation $W_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ aus dem Normalisator von $\Gamma_0(6)$ gilt

$$W_6(h(\frac{1}{2},\infty)) = h(-\frac{1}{3},0)$$

und für $W_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ gilt

$$W_2(h(0,\infty)) = h(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}) \ .$$

Wir verwenden die Darstellung der entsprechenden Transformierten

$$\begin{array}{rcl} A_6(-\frac{1}{6z}) & = & \frac{72}{A_6(z)} \\ A_6(-\frac{2z+1}{6z+2}) & = & -8\frac{A_6(z)+9}{A_6(z)+8} \end{array}$$

und berechnen

$$\begin{array}{rcl} A_6(h(-\frac{1}{3},0)) & = & A_6(W_6(h(\frac{1}{2},\infty))) \\ & = & \frac{72}{A_6(h(\frac{1}{2},\infty))} \\ & = & [-8,0\,] \end{array}$$

durch Abbilden der Fußpunkte. Analog erhalten wir

$$A_6(h(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3})) = [-9,-8\,] \ .$$

Es gilt für alle auftretenden n

$$A_n(h(0,\infty)) = [\,0,\infty)$$

denn: $A_n(\rho)$ ist Nullstelle des Zählers u in der Darstellung

$$J = \frac{u(A_n)}{v(A_n)} \ .$$

Da das Polynom u nur positive Koeffizienten hat, ist $A_n(\rho) < 0$ und aus Stetigkeitsgründen folgt die Behauptung.

2 Ergebnisse

Zeichenerklärung

μ	Index von $\Gamma_0(n)$ in Γ: $(\Gamma : \Gamma_0(n))$
ϵ_ρ	Anzahl der Fixpunkte äquivalent zu ρ
α_ρ	Anzahl der entsprechenden Nichtfixpunkte
ϵ_i	Anzahl der Fixpunkte äquivalent zu i
α_i	Anzahl der entsprechenden Nichtfixpunkte
s	Spitze
$\kappa(s)$	Fächerweite der Spitze s
$v(s)$	Bewertung einer Funktion an der Spitze s
g_i	Modulfunktion für $\Gamma_0(n)$ der Ordnung 1 mit Pol bei $i\infty$
A_n	Erzeugende mit Pol bei $i\infty$ und Nullstelle bei 0
τ_ρ	Punkt äquivalent zu ρ
τ_i	Punkt äquivalent zu i
J_n	Transformierte von J: $J_n(z) = J(nz)$
$\mathcal{N}_n$	Normalisator von $\Gamma_0(n)$ in $GL_2^+(\mathbb{R})$

Erläuterungen zu den Ergebnissen

Die Erklärungen zu den Berechnungen der einzelnen Punkte sind in den folgenden Kapiteln bzw. Abschnitten zu finden:

1.	II.1.1/2/4	5.	III.1.2
2.	III.1.1	6.	III.1.2
3.	III.1.1	7.	III.1.3
4.	II.2.2	8.	II.1.5

Fundamentalbereich II.1.3

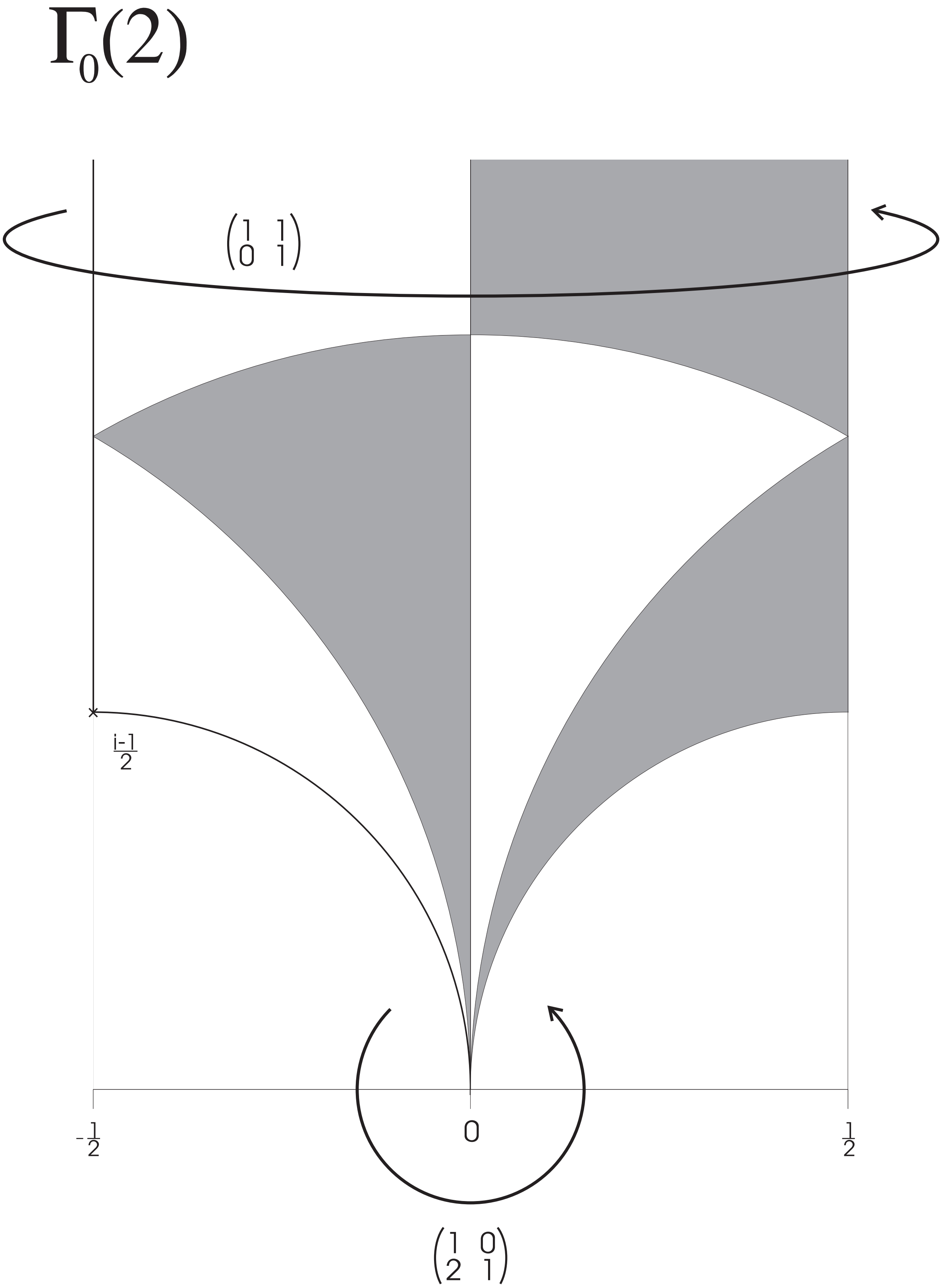
$\Gamma_0(2)$

1. Daten:

μ	ϵ_ρ	α_ρ	ϵ_i	α_i	σ_∞
3	0	1	1	1	2

Spitzen	s	$i\infty$	0
Fächerweiten	$\kappa(s)$	1	2

2. Modulfunktionen der Ordnung 1 mit Pol bei $i\infty$:


$\Gamma_0(2)$
$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$
$\frac{i-1}{2}$
$-\frac{1}{2}$
0
$\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}$

	$v(0)$	$v(i\infty)$	r_2
g_1	1	-1	-24

$$A_2 = g_1 = \frac{\eta(\tau)^{24}}{\eta(2\tau)^{24}}$$

3. Funktionswerte von A_2 an den Spitzen s:

s	$i\infty$	0
$A_2(s)$	∞	0

4. q-Entwicklung der Erzeugenden

$$A_2 = \frac{1}{q} - 24 + 276q - 2048q^2 + 11202q^3 \ldots$$

5. Darstellung von J und $J - 1728$:

$$\begin{aligned} J &= \frac{(A_2 + 2^8)^3}{A_2^2} \\ J - 1728 &= \frac{(A_2 + 2^6)(A_2 - 2^9)^2}{A_2^2} \end{aligned}$$

6. Funktionswerte von A_2 an den Punkten τ_ρ, τ_i:

$$\begin{aligned} A_2(\tau_\rho) &\in \{-2^8\} \\ A_2(\tau_i) &\in \{-2^6, 2^9\} \end{aligned}$$

7. Darstellung der Transformierten J_2:

$$J_2 = \frac{(A_2 + 2^4)^3}{A_2}$$

8. Normalisator $\mathcal{N}_2$:

$$(\mathcal{N}_2 : \Gamma_0(2)) = 2, \quad \text{Erzeugende: } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Transformation	Transformierte
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$A_2(-\frac{1}{2z}) = \frac{2^{12}}{A_2(z)}$

$\Gamma_0(3)$

1. Daten:

μ	ϵ_ρ	α_ρ	ϵ_i	α_i	σ_∞
4	1	1	0	2	2

Spitzen	s	$i\infty$	0
Fächerweiten	$\kappa(s)$	1	3

2. Modulfunktionen der Ordnung 1 mit Pol bei $i\infty$:

	$v(0)$	$v(i\infty)$	r_2
g_1	1	-1	-12

$$A_3 = g_1 = \frac{\eta(\tau)^{12}}{\eta(3\tau)^{12}}$$

3. Funktionswerte von A_3 an den Spitzen s:

s	$i\infty$	0
$A_3(s)$	∞	0

4. q-Entwicklung der Erzeugenden

$$A_3 = \frac{1}{q} - 12 + 54q - 76q^2 + 81q^3 \dots$$

5. Darstellung von J und $J - 1728$:

$$\begin{aligned} J &= \frac{(A_3 + 3^3)(A_3 + 3^5)^3}{A_3^3} \\ J - 1728 &= \frac{(A_3^2 - 2 \cdot 3^5 A_3 - 3^9)^2}{A_3^3} \end{aligned}$$

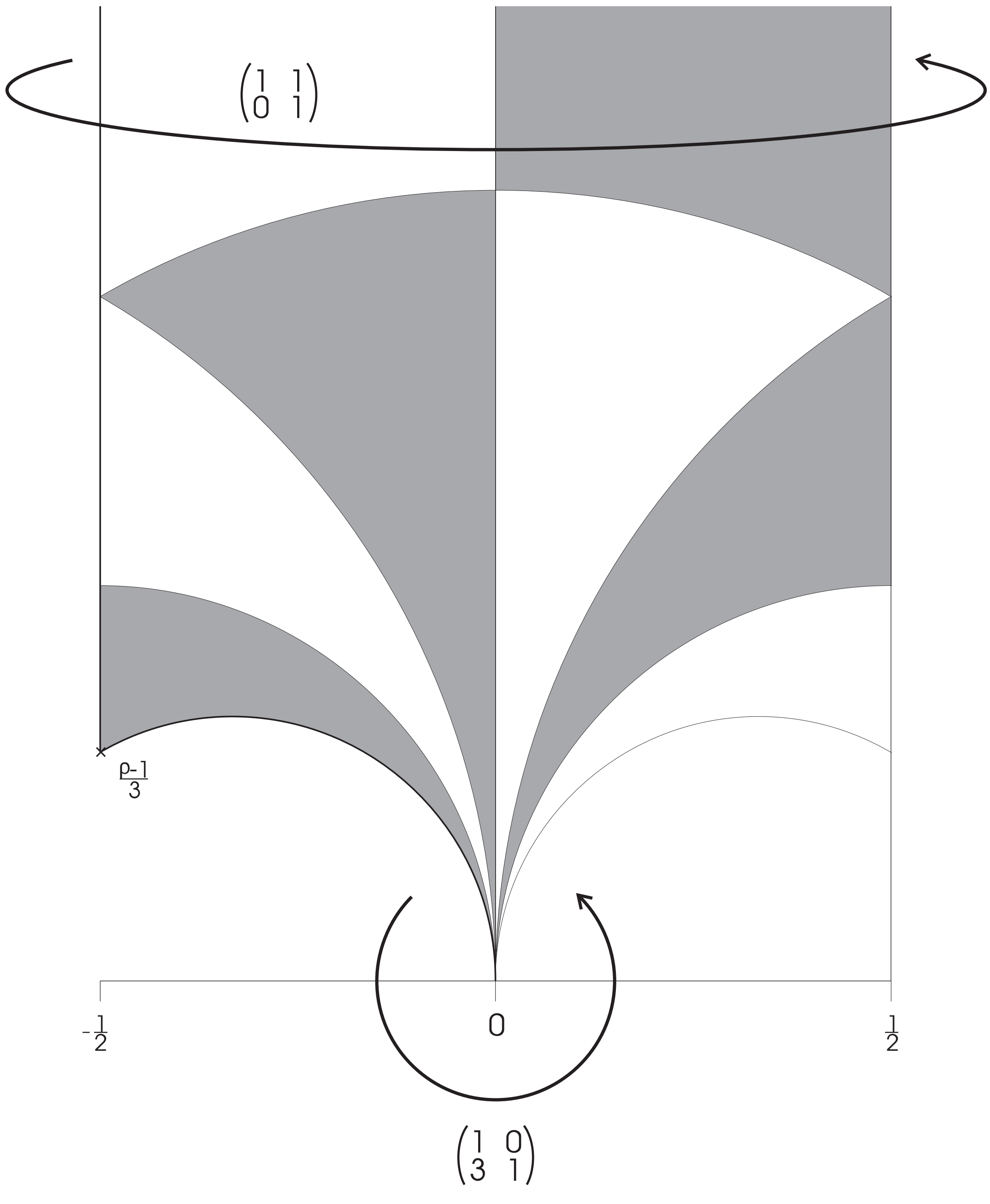
6. Funktionswerte von A_3 an den Punkten τ_ρ, τ_i:

$$\begin{aligned} A_3(\tau_\rho) &\in \{-3^3, -3^5\} \\ A_3(\tau_i) &\in \{3^4(3 \pm 2\sqrt{3}\} \end{aligned}$$

7. Darstellung der Transformierten J_3:

$$J_3 = \frac{(A_3 + 27)(A_3 + 3)^3}{A_3}$$

$\Gamma_0(3)$


$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$
$\frac{\rho-1}{3}$
$-\frac{1}{2}$
0
$\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}$

8. Normalisator $\mathcal{N}_3$:

$$(\mathcal{N}_3 : \Gamma_0(3)) = 2, \quad \text{Erzeugende: } \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

Transformation	Transformierte
$\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$A_2(-\frac{1}{3z}) = \frac{3^6}{A_3(z)}$

$\Gamma_0(4)$

1. Daten:

μ	ϵ_ρ	α_ρ	ϵ_i	α_i	σ_∞
6	0	2	0	3	3

Spitzen	s	$i\infty$	0	$\frac{1}{2}$
Fächerweiten	$\kappa(s)$	1	4	1

2. Modulfunktionen der Ordnung 1 mit Pol bei $i\infty$:

	$v(0)$	$v(\frac{1}{2})$	$v(i\infty)$	r_2	r_4
g_1	1	0	-1	0	-8
g_2	0	1	-1	24	-16

$$A_4 = g_1 = \frac{\eta(\tau)^8}{\eta(4\tau)^8} \qquad g_2 = \frac{\eta(2\tau)^{24}}{\eta(\tau)^8\eta(4\tau)^{16}}$$

3. Funktionswerte von A_4 an den Spitzen s:

$$g_1 + 8 = g_2 - 8$$

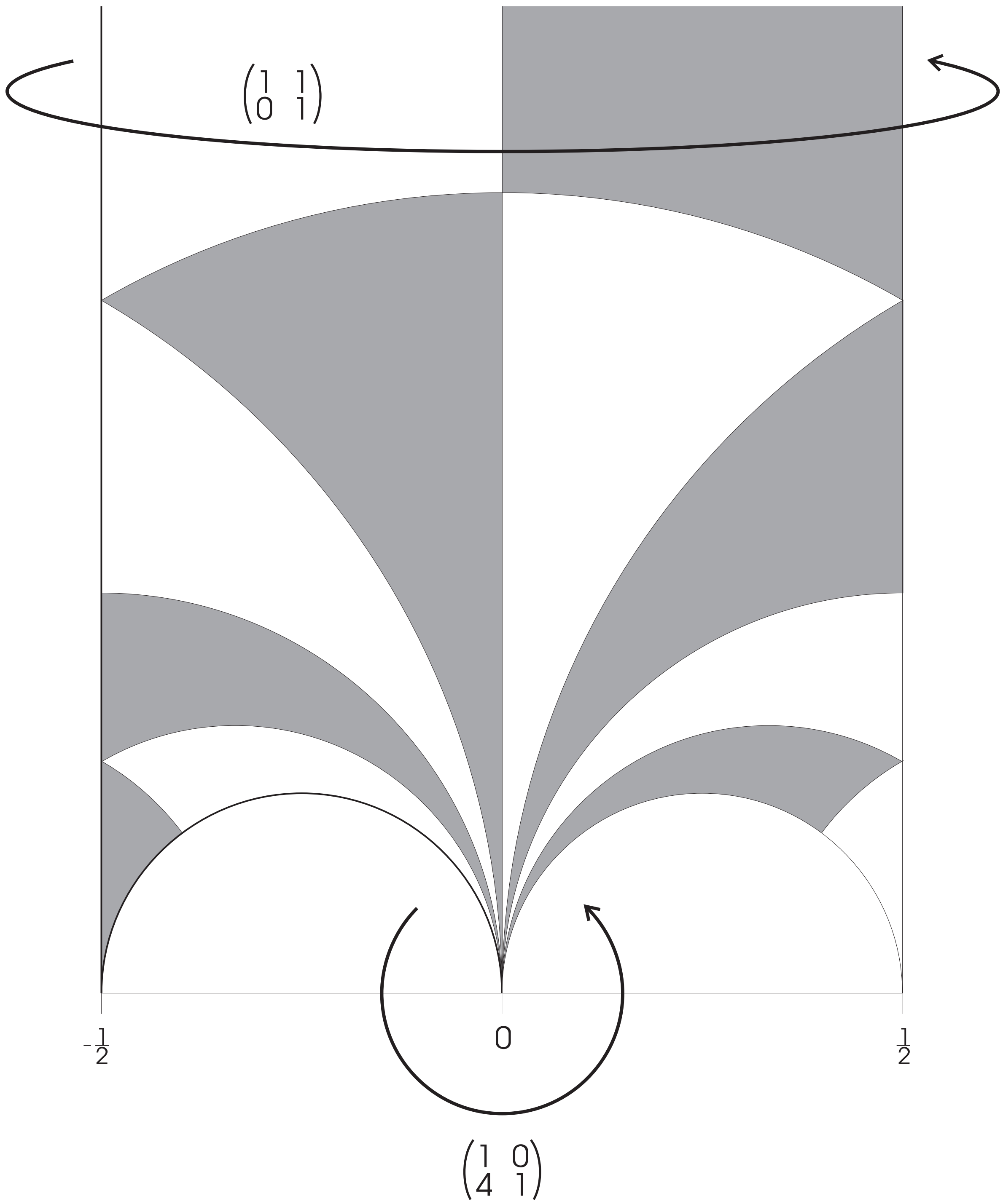
s	$i\infty$	0	$\frac{1}{2}$
$A_4(s)$	∞	0	-16

4. q-Entwicklung der Erzeugenden

$$A_4 = \frac{1}{q} - 8 + 20q + 0q^2 - 62q^3 \ldots$$

5. Darstellung von J und $J - 1728$:

$\Gamma_0(4)$


$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$
$-\frac{1}{2}$
0
$\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix}1 & 0\\4 & 1\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} J &= \frac{(A_4^2 + 2^8 A_4 + 2^{12})^3}{A_4^4(A_4 + 2^4)} \\ J - 1728 &= \frac{(A_4 + 2^5)^2 (A_4^2 - 2^9 A_4 - 2^{13})^2}{A_4^4(A_4 + 2^4)} \end{aligned}$$

6. Funktionswerte von A_4 an den Punkten τ_ρ, τ_i:

$$\begin{aligned} A_4(\tau_\rho) &\in \{2^6(-2 \pm \sqrt{3}\} \\ A_4(\tau_i) &\in \{-2^5, 2^6(4 \pm 3\sqrt{2})\} \end{aligned}$$

7. Darstellung der Transformierten J_4:

$$J_4 = \frac{(A_4^2 + 16 A_4 + 16)^3}{A_4(A_4 + 16)}$$

8. Normalisator $\mathcal{N}_4$:

$$(\mathcal{N}_4 : \Gamma_0(4)) = 6, \quad \text{Erzeugende: } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Transformation	Transformierte	
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$	$A_4(-\frac{1}{4z}) = \frac{2^8}{A_4(z)}$	
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$A_4(z + \frac{1}{2}) = -A_4(z) - 16$	$\Longleftrightarrow A_4(z + \frac{1}{2}) + 8 = -(A_4(z) + 8)$

d.h. die Koeffizienten α_i der q-Entwicklung von $A_4 + 8$ sind =0 für $i \not\equiv 1 \bmod 2$

$\mathbf{\Gamma_0(5)}$

1. Daten:

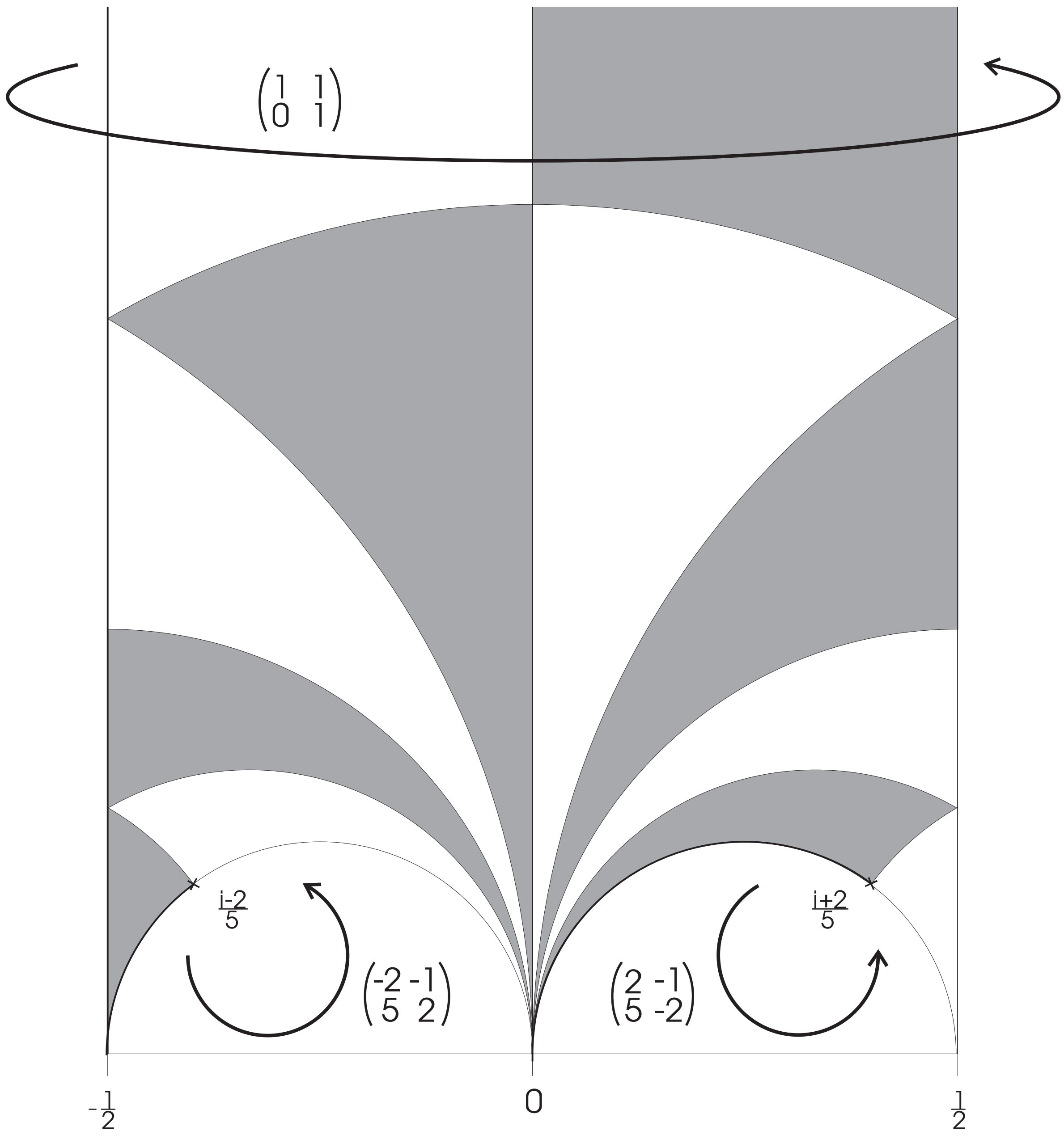
μ	ϵ_ρ	α_ρ	ϵ_i	α_i	σ_∞
6	0	2	0	3	2

Spitzen	s	$i\infty$	0
Fächerweiten	$\kappa(s)$	1	5

2. Modulfunktionen der Ordnung 1 mit Pol bei $i\infty$:

	$v(0)$	$v(i\infty)$	r_2
g_1	1	-1	-6

$\Gamma_0(5)$


$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$
$\frac{i-2}{5}$
$\begin{pmatrix}-2 & -1\\5 & 2\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}2 & -1\\5 & -2\end{pmatrix}$
$\frac{i+2}{5}$
$-\frac{1}{2}$
0
$\frac{1}{2}$

$$A_5 = g_1 = \frac{\eta(\tau)^6}{\eta(5\tau)^6}$$

3. Funktionswerte von A_5 an den Spitzen s:

s	$i\infty$	0
$A_5(s)$	∞	0

4. q-Entwicklung der Erzeugenden

$$A_5 = \frac{1}{q} - 6 + 9q + 10q^2 - 30q^3 \ldots$$

5. Darstellung von J und $J - 1728$:

$$\begin{aligned} J &= \frac{(A_5^2 + 2 \cdot 5^3 A_5 + 5^5)^3}{A_5^5} \\ J - 1728 &= \frac{(A_5^2 + 22A_5 + 5^3)(A_5^2 - 4 \cdot 5^3 A_5 - 5^6)^2}{A_5^5} \end{aligned}$$

6. Funktionswerte von A_5 an den Punkten τ_ρ, τ_i:

$$\begin{aligned} A_5(\tau_\rho) &\in \{5^2(-5 \pm 2\sqrt{5})\} \\ A_5(\tau_i) &\in \{-11 \pm 2i, 5^3(2 \pm \sqrt{5})\} \end{aligned}$$

7. Darstellung der Transformierten J_5:

$$J_5 = \frac{(A_5^2 + 10A_5 + 5)^3}{A_5}$$

8. Normalisator $\mathcal{N}_5$:

$$(\mathcal{N}_5 : \Gamma_0(5)) = 2, \quad \text{Erzeugende: } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Transformation	Transformierte
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$	$A_5(-\frac{1}{5z}) = \frac{5^3}{A_5(z)}$

$\Gamma_0(6)$

1. Daten:

μ	ϵ_ρ	α_ρ	ϵ_i	α_i	σ_∞
12	0	4	0	6	4

Spitzen	s	$i\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
Fächerweiten	$\kappa(s)$	1	6	3	2

2. Modulfunktionen der Ordnung 1 mit Pol bei $i\infty$:

	$v(0)$	$v(\frac{1}{2})$	$v(\frac{1}{3})$	$v(i\infty)$	r_2	r_3	r_6
g_1	1	0	0	-1	-1	1	-5
g_2	0	1	0	-1	8	4	-8
g_3	0	0	1	-1	3	9	-9

$$A_6 = g_1 = \frac{\eta(\tau)^5\eta(3\tau)}{\eta(2\tau)\eta(6\tau)^5} \qquad g_2 = \frac{\eta(2\tau)^8\eta(3\tau)^4}{\eta(\tau)^4\eta(6\tau)^8} \qquad g_3 = \frac{\eta(2\tau)^3\eta(3\tau)^9}{\eta(\tau)^3\eta(6\tau)^9}$$

3. Funktionswerte von A_6 an den Spitzen s:

$$g_1 + 5 = g_2 - 4 = g_3 - 3$$

s	$i\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$A_6(s)$	∞	0	-9	-8

4. q-Entwicklung der Erzeugenden

$$A_6 = \frac{1}{q} - 5 + 6q + 4q^2 - 3q^3 \ldots$$

5. Darstellung von J:

$$J = \frac{(A_6+12)^3(A_6^3 + 7\cdot 6^2 A_6^2 + 3\cdot 6^4 A_6 + 2\cdot 6^5)^3}{A_6^6(A_6+9)^3(A_6+8)^2}$$

6. Funktionswerte von A_6 an den Punkten τ_ρ:

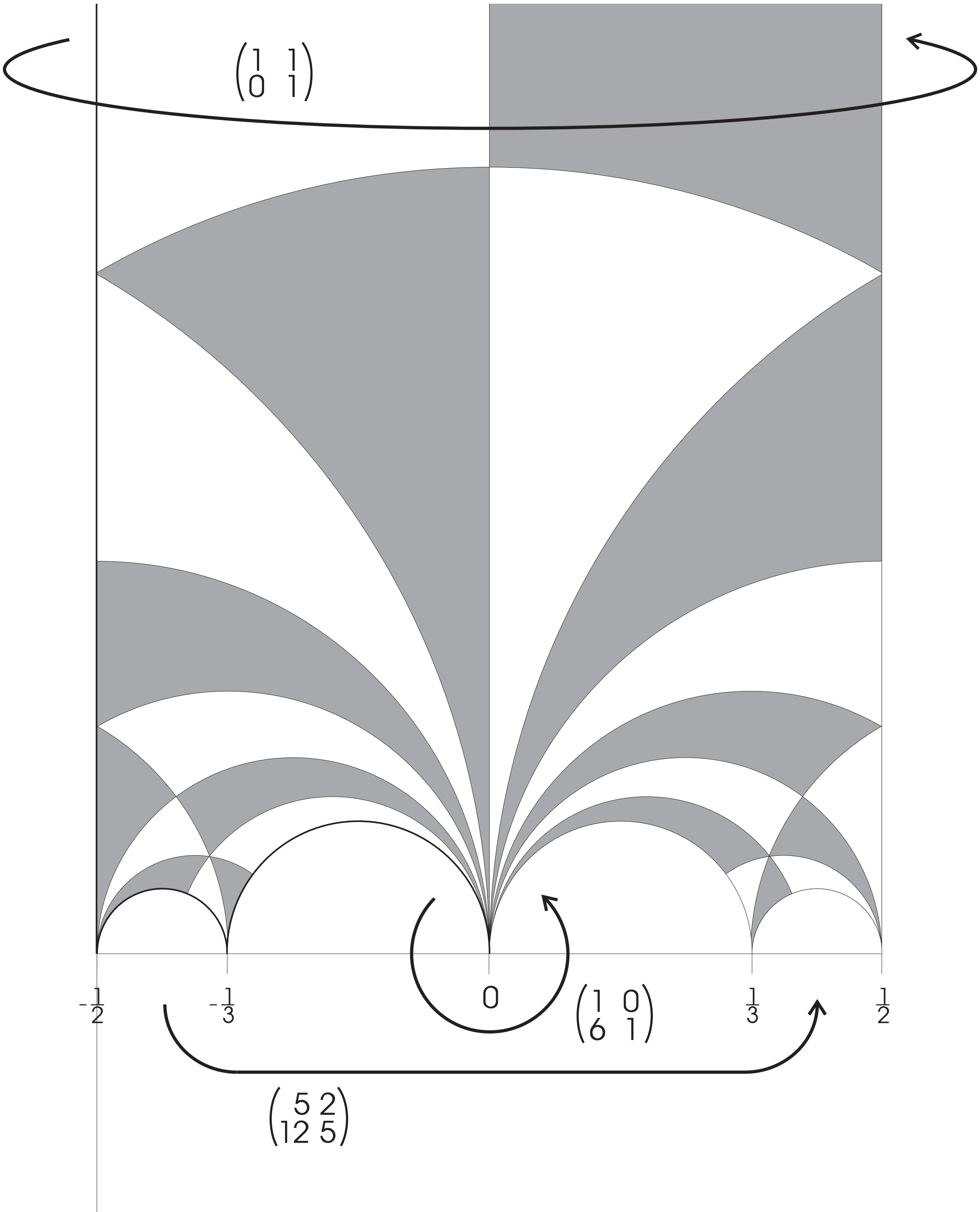
$$A_6(\tau_\rho) \in \{-12, -12(7 + 5\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{4}), -84 + 30\sqrt[3]{2} + 24\sqrt[3]{4} \pm (30\sqrt[3]{2} - 24\sqrt[3]{4})\sqrt{3}i\}$$

7. Darstellung der Transformierten J_6:

$$J_6 = \frac{(A_6+6)^3(A_6^3 + 18A_6^2 + 84A_6 + 96)^3}{A_6(A_6+8)^3(A_6+9)^2}$$

8. Normalisator $\mathcal{N}_6$:

$\Gamma_0(6)$


$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$
$-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{3}$
0
$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix}1 & 0\\6 & 1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}5 & 2\\12 & 5\end{pmatrix}$

$(\mathcal{N}_6 : \Gamma_0(6)) = 4$, Erzeugende: $\left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{smallmatrix}\right)$

	Transformation	Transformierte
$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$A_6(-\frac{1}{6z}) = \frac{2 \cdot 6^2}{A_6(z)}$
	$\left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{smallmatrix}\right)$	$A_6(\frac{4z+1}{6z+2}) = -8\frac{A_6(z)+9}{A_6(z)+8}$
	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{smallmatrix}\right)$	$A_6(\frac{3z+1}{6z+3}) = -9\frac{A_6(z)+8}{A_6(z)+9}$

$\Gamma_0(7)$

1. Daten:

μ	ϵ_ρ	α_ρ	ϵ_i	α_i	σ_∞
8	2	2	0	4	2

Spitzen	s	$i\infty$	0
Fächerweiten	$\kappa(s)$	1	7

2. Modulfunktionen der Ordnung 1 mit Pol bei $i\infty$:

	$v(0)$	$v(i\infty)$	r_7
g_1	1	-1	-4

$$A_7 = g_1 = \frac{\eta(\tau)^4}{\eta(7\tau)^4}$$

3. Funktionswerte von A_7 an den Spitzen s:

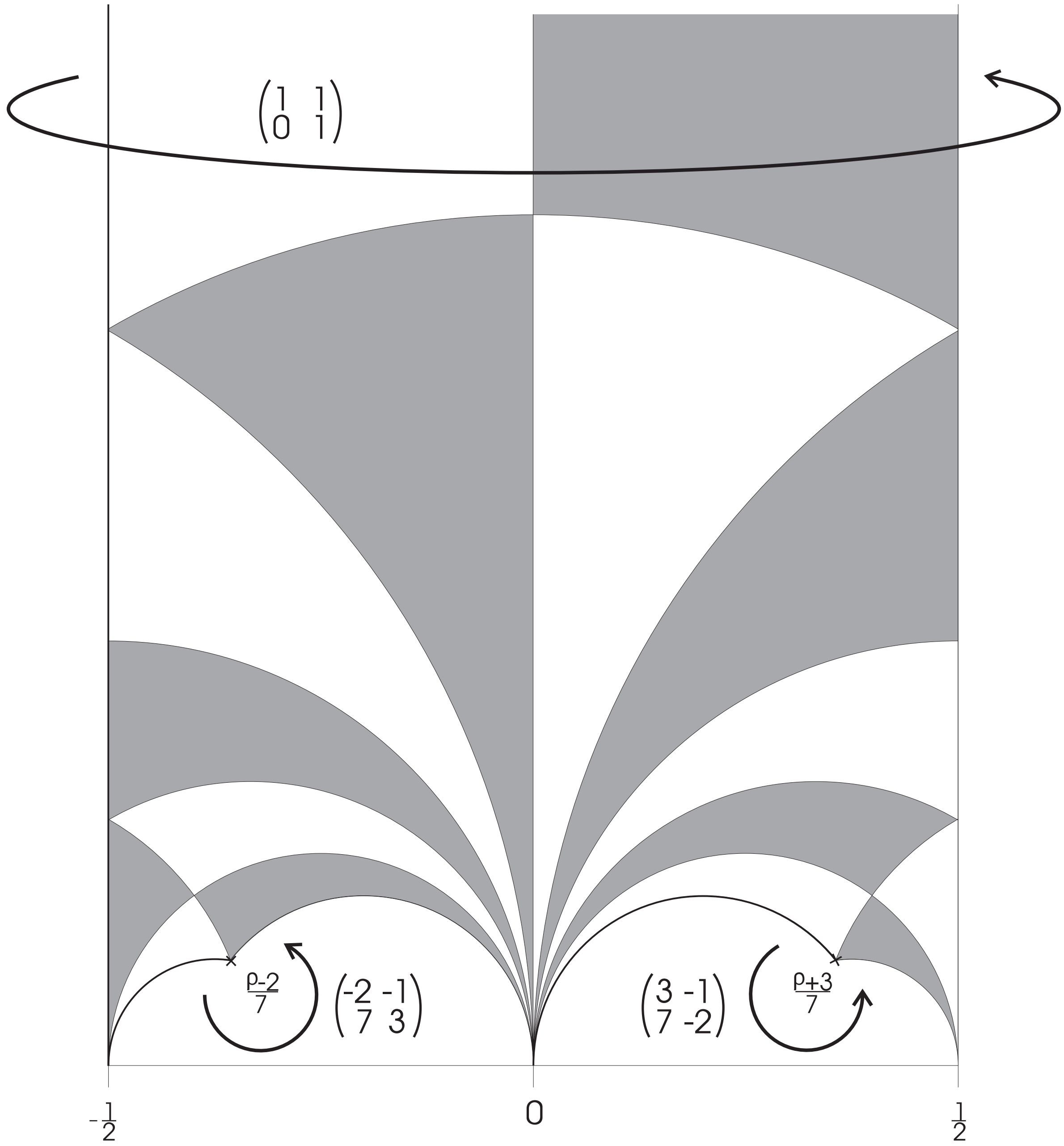
s	$i\infty$	0
$A_7(s)$	∞	0

4. q-Entwicklung der Erzeugenden

$$A_7 = \frac{1}{q} - 4 + 2q + 8q^2 - 5q^3 \dots$$

5. Darstellung von J und $J - 1728$:

$\Gamma_0(7)$


$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
$\frac{\rho-2}{7}$
$\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 7 & 3\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}3 & -1\\ 7 & -2\end{pmatrix}$
$\frac{\rho+3}{7}$
$-\frac{1}{2}$
0
$\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} J &= \frac{(A_7^2 + 13A_7 + 7^2)(A_7^2 + 5\cdot 7^2 A_7 + 7^4)^3}{A_7^7} \\ J - 1728 &= \frac{(A_7^4 - 10\cdot 7^2 A_7^3 - 9\cdot 7^4 A_7^2 - 2\cdot 7^6 A_7 - 7^7)^2}{A_7^7} \end{aligned}$$

6. Funktionswerte von A_7 an den Punkten τ_ρ:

$$A_7(\tau_\rho) \in \{\tfrac{1}{2}(-13 \pm 3\sqrt{3}i), \tfrac{7^2}{2}(-5 \pm \sqrt{21})\}$$

7. Darstellung der Transformierten J_7:

$$J_7 = \frac{(A_7^3 + 13A_7 + 49)(A_7^2 + 5A_7 + 1)^3}{A_7}$$

8. Normalisator $\mathcal{N}_7$:

$$(\mathcal{N}_7 : \Gamma_0(7)) = 2, \quad \text{Erzeugende: } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Transformation	Transformierte
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$	$A_7(-\frac{1}{7z}) = \frac{7^2}{A_7(z)}$

$\Gamma_0(8)$

1. Daten:

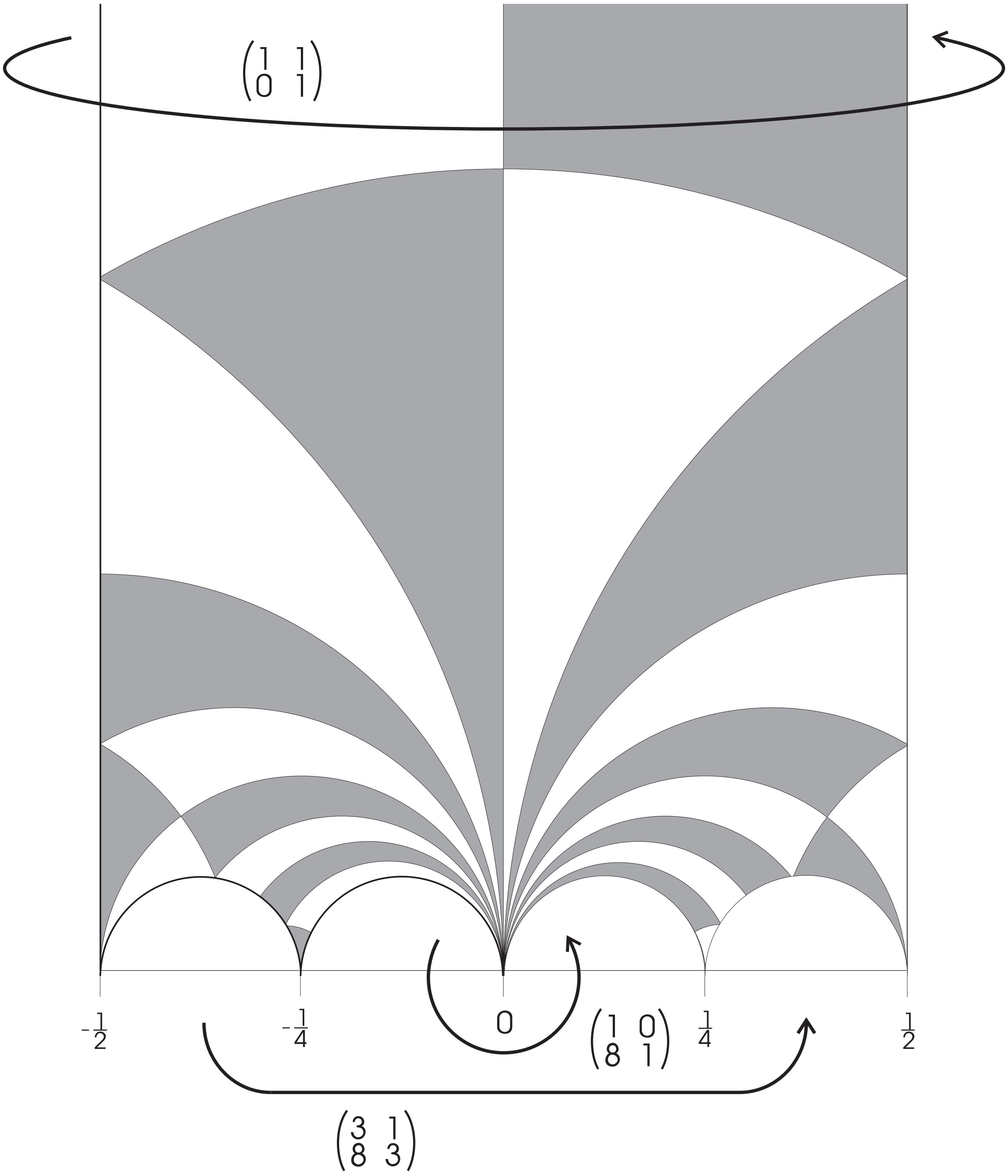
μ	ϵ_ρ	α_ρ	ϵ_i	α_i	σ_∞
12	0	4	0	6	4

Spitzen	s	$i\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Fächerweiten	$\kappa(s)$	1	8	2	1

2. Modulfunktionen der Ordnung 1 mit Pol bei $i\infty$:

	$v(0)$	$v(\frac{1}{2})$	$v(\frac{1}{4})$	$v(i\infty)$	r_2	r_4	r_8
g_1	1	0	1	-1	-2	2	-4
g_2	0	1	0	-1	10	-2	-4
g_3	0	0	1	-1	-4	12	-8

$\Gamma_0(8)$


$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$
$-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{4}$
0
$\begin{pmatrix}1&0\\8&1\end{pmatrix}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix}3&1\\8&3\end{pmatrix}$

$$A_8 = g_1 = \frac{\eta(\tau)^4\eta(4\tau)^2}{\eta(2\tau)^2\eta(8\tau)^4} \qquad g_2 = \frac{\eta(2\tau)^{10}}{\eta(\tau)^4\eta(4\tau)^2\eta(8\tau)^4} \qquad g_3 = \frac{\eta(4\tau)^{12}}{\eta(2\tau)^4\eta(8\tau)^8}$$

3. Funktionswerte von A_8 an den Spitzen s:

$$g_1 + 4 = g_2 - 4 = g_3$$

s	$i\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$A_8(s)$	∞	0	-8	-4

4. q-Entwicklung der Erzeugenden

$A_8 = \dfrac{1}{q} - 4 + 4q + 0q^2 + 2q^3 \ldots$

5. Darstellung von J:

$$J = \frac{(A_8^4 + 2^8A_8^3 + 5\cdot 2^{10}A_8^2 + 2^{15}A_8 + 2^{16})^3}{A_8^8(A_8+8)^2(A_8+4)}$$

6. Funktionswerte von A_8 an den Punkten τ_ρ:

$$A_8(\tau_\rho) \in \{2^5(-2+\sqrt{3}) \pm 2^4\sqrt{26-15\sqrt{3}}, -2^5(2+\sqrt{3}) \pm 2^4\sqrt{26+15\sqrt{3}}\}$$

7. Darstellung der Transformierten J_8:

$$J_8 = \frac{(A_8^4 + 16A_8^3 + 80A_8^2 + 128A_8 + 16)^3}{A_8(A_8+4)^2(A_8+8)}$$

8. Normalisator $\mathcal{N}_8$:

$$(\mathcal{N}_8 : \Gamma_0(8)) = 8, \quad \text{Erzeugende: } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Transformation	Transformierte
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$	$A_8(-\frac{1}{8z}) = \frac{2^5}{A_8(z)}$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$A_8(z+\frac{1}{2}) = -A_8(z) - 8 \iff A_8(z+\frac{1}{2}) + 4 = -(A_8(z)+4)$

d.h. die Koeffizienten α_i der q-Entwicklung von $A_8 + 4$ sind =0 für $i \not\equiv 1 \bmod 2$

$\Gamma_0(9)$

1. Daten:

μ	ϵ_ρ	α_ρ	ϵ_i	α_i	σ_∞
12	0	4	0	6	4

Spitzen	s	$i\infty$	0	$\pm\frac{1}{3}$
Fächerweiten	$\kappa(s)$	1	9	1

2. Modulfunktionen der Ordnung 1 mit Pol bei $i\infty$:

	$v(0)$	$v(\pm\frac{1}{3})$	$v(i\infty)$	r_3	r_9
g_1	1	0	-1	0	-3

$$A_9 = g_1 = \frac{\eta(\tau)^3}{\eta(9\tau)^3}$$

3. Funktionswerte von A_9 an den Spitzen s:

s	$i\infty$	0	$\frac{1}{3}$
$A_9(s)$	∞	0	$-\frac{3}{2}(3 \pm \sqrt{3}i)$

4. q-Entwicklung der Erzeugenden

$$A_9 = \frac{1}{q} - 3 + 0q + 5q^2 + 0q^3 \ldots$$

5. Darstellung von J:

$$J = \frac{(A_9+9)^3(A_9^3 + 3^5A_9^2 + 3^7A_9 + 3^8)^3}{A_9^9(A_9^2 + 9A_9 + 27)}$$

6. Darstellung der Transformierten J_9:

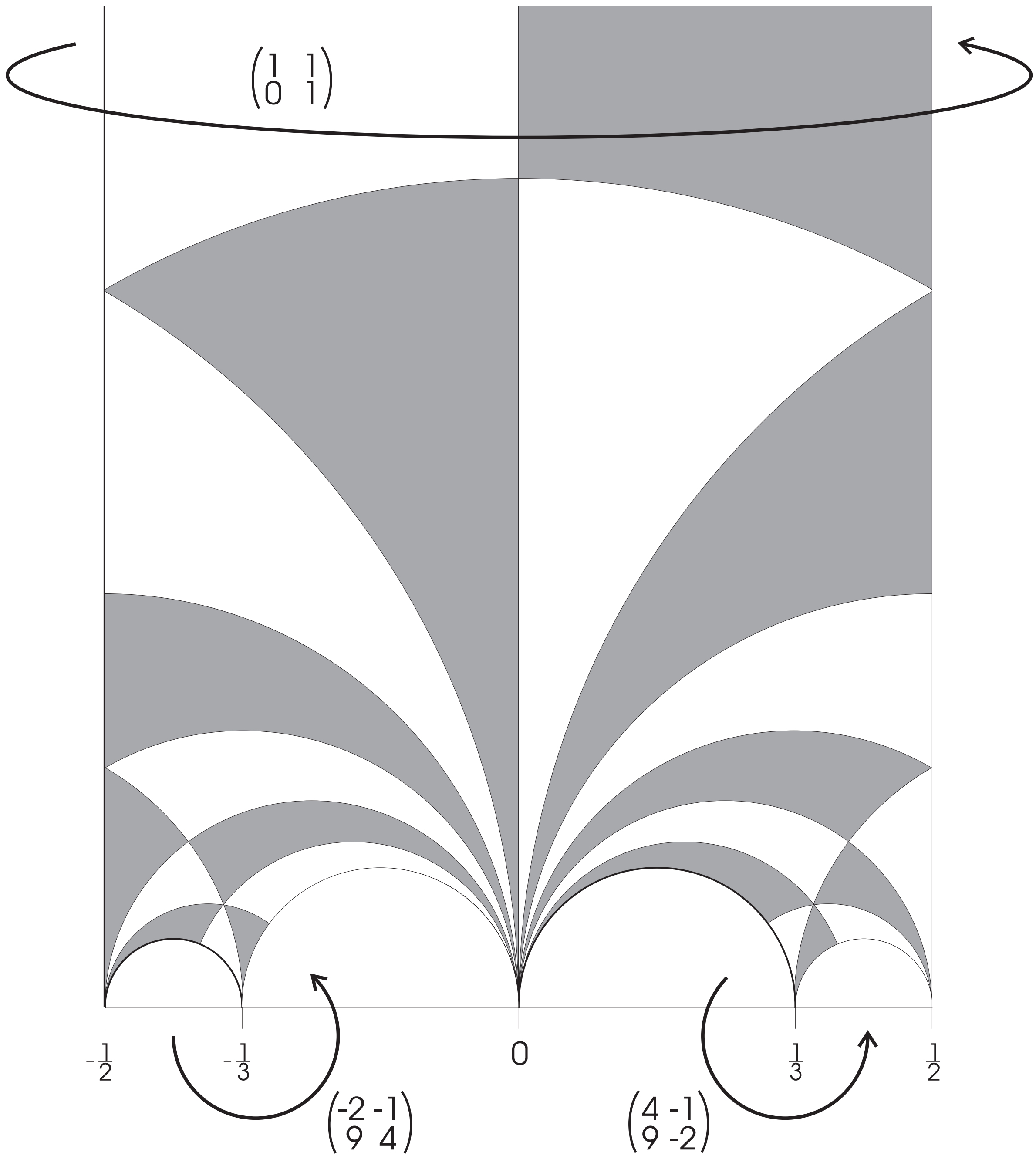
$$J_9 = \frac{(A_9+3)^3(A_9^3 + 9A_9^2 + 27A_9 + 3)^3}{A_9(A_9^2 + 9A_9 + 27)}$$

7. Normalisator $\mathcal{N}_9$:

$$(\mathcal{N}_9 : \Gamma_0(9)) = 12, \quad \text{Erzeugende: } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Transformation	Transformierte
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$	$A_9(-\frac{1}{9z}) = \frac{3^3}{A_9(z)}$
$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$A_9(z+\frac{1}{3}) = \rho^2 A_9(z) + 3\rho^2 - 3 \iff A_9(z+\frac{1}{3}) + 3 = \rho^2(A_9(z)+3)$

$\Gamma_0(9)$


$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{3}$
0
$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$

d.h. die Koeffizienten α_i der q-Entwicklung von $A_9 + 3$ sind =0 für $i \not\equiv 2 \bmod 3$

$\mathbf{\Gamma_0(10)}$

1. Daten:

μ	ϵ_ρ	α_ρ	ϵ_i	α_i	σ_∞
18	0	6	2	8	4

Spitzen	s	$i\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$
Fächerweiten	$\kappa(s)$	1	10	5	2

2. Modulfunktionen der Ordnung 1 mit Pol bei $i\infty$:

	$v(0)$	$v(\frac{1}{2})$	$v(\frac{1}{5})$	$v(i\infty)$	r_2	r_3	r_6
g_1	1	0	0	-1	-1	1	-3
g_2	0	1	0	-1	4	2	-4
g_3	0	0	1	-1	1	5	-5

$$A_{10} = g_1 = \frac{\eta(\tau)^3\eta(5\tau)}{\eta(2\tau)\eta(10\tau)^3} \qquad g_2 = \frac{\eta(2\tau)^4\eta(5\tau)^2}{\eta(\tau)^2\eta(10\tau)^4} \qquad g_3 = \frac{\eta(2\tau)\eta(5\tau)^5}{\eta(\tau)\eta(10\tau)^5}$$

3. Funktionswerte von A_{10} an den Spitzen s:

$$g_1 + 3 = g_2 - 2 = g_3 - 1$$

s	$i\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$
$A_{10}(s)$	∞	0	-5	-4

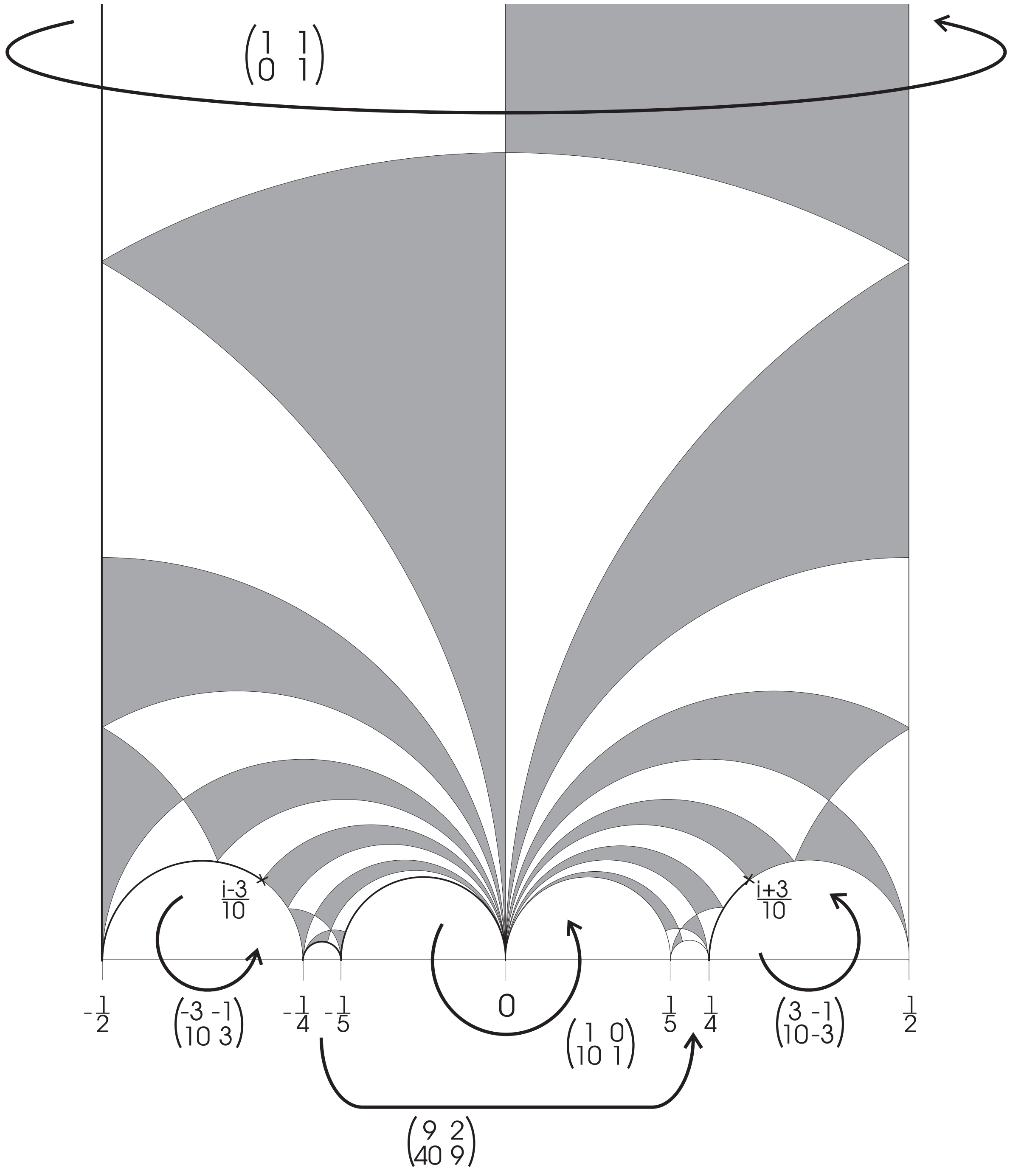
4. q-Entwicklung der Erzeugenden

$$A_{10} = \frac{1}{q} - 3 + q + 2q^2 + 2q^3 \ldots$$

5. Darstellung von J:

$$J = \frac{(A_{10}^6 + 26 \cdot 10 A_{10}^5 + 64 \cdot 10^2 A_{10}^4 + 64 \cdot 10^3 A_{10}^3 + 32 \cdot 10^4 A_{10}^2 + 8 \cdot 10^5 A_{10} + 8 \cdot 10^5)^3}{A_{10}^{10}(A_{10}+5)^5(A_{10}+4)^2}$$

$\Gamma_0(10)$


$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\frac{i-3}{10}$
$\frac{i+3}{10}$
$-\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$
$-\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{5}$
0
$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{4}$
$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$
$\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 40 & 9 \end{pmatrix}$

6. Darstellung der Transformierten J_{10}:

$$J_{10} = \frac{(A_{10}^6 + 20A_{10}^5 + 160A_{10}^4 + 6400A_{10}^3 + 1280A_{10}^2 + 1040A_{10}^2 + 1040A_{10} + 80)^3}{A_{10}(A_{10}+5)^4(A_{10}+4)^5}$$

7. Normalisator $\mathcal{N}_{10}$:

$$(\mathcal{N}_{10} : \Gamma_0(10)) = 4, \quad \text{Erzeugende: } \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Transformation	Transformierte
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$	$A_{10}(-\frac{1}{10z}) = \frac{20}{A_{10}(z)}$
$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$	$A_{10}(\frac{6z+1}{10z+2}) = -4\frac{A_{10}(z)+5}{A_{10}(z)+4}$
$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$	$A_{10}(\frac{5z+2}{10z+5}) = -5\frac{A_{10}(z)+4}{A_{10}(z)+5}$

$\Gamma_0(12)$

1. Daten:

μ	ϵ_ρ	α_ρ	ϵ_i	α_i	σ_∞
24	0	8	0	12	6

Spitzen	s	$i\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$
Fächerweiten	$\kappa(s)$	1	12	3	4	3	1

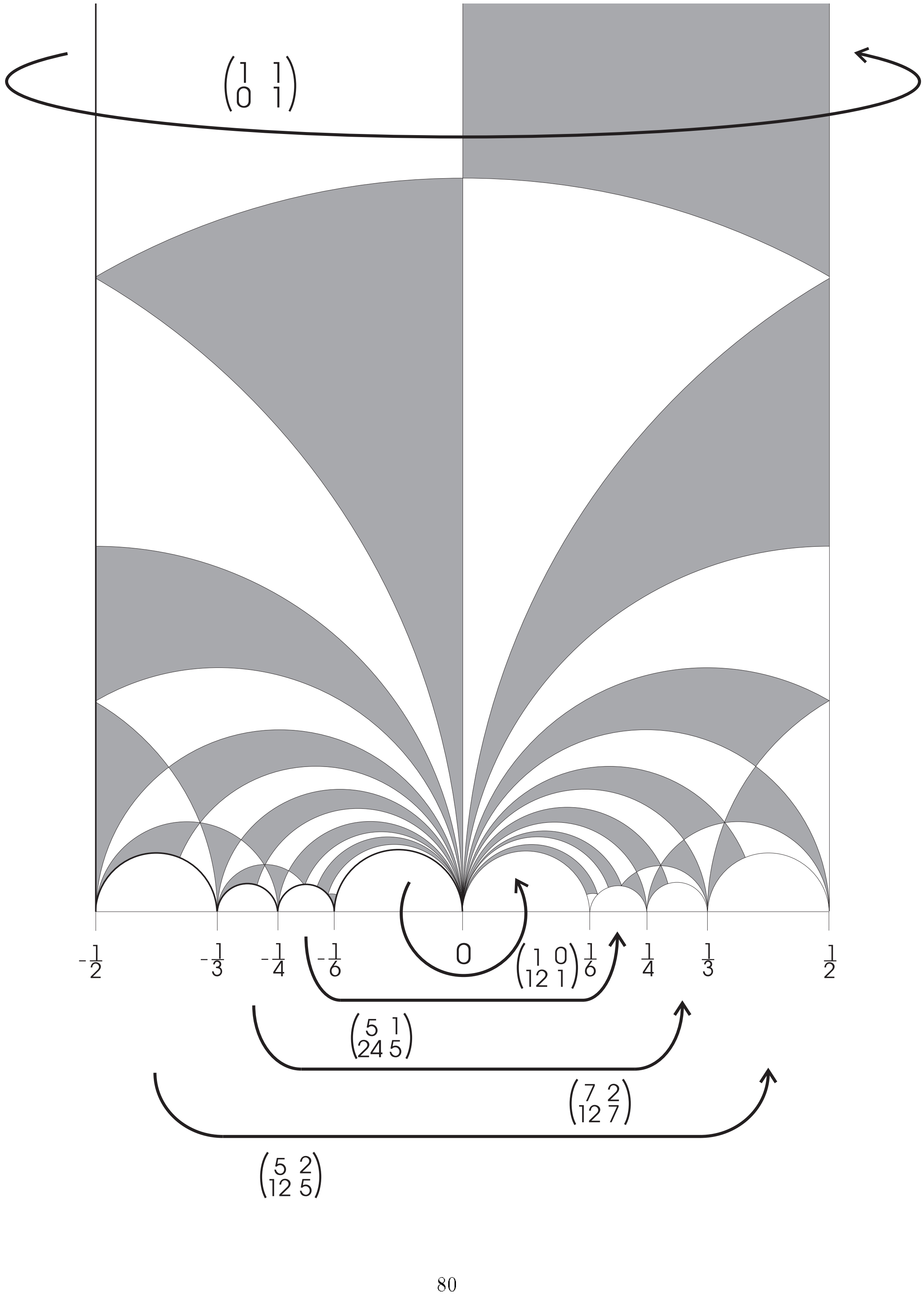
2. Modulfunktionen der Ordnung 1 mit Pol bei $i\infty$:

	$v(0)$	$v(\frac{1}{2})$	$v(\frac{1}{3})$	$v(\frac{1}{4})$	$v(\frac{1}{6})$	$v(i\infty)$	r_2	r_3	r_4	r_6	r_{12}
g_1	1	0	0	0	0	-1	-2	-1	1	2	-3
g_2	0	1	0	0	0	-1	7	1	-2	-1	-2
g_3	0	0	1	0	0	-1	0	3	1	0	-3
g_4	0	0	0	1	0	-1	-2	0	4	2	-4
g_5	0	0	0	0	1	-1	-3	-3	2	9	-6

$$A_{12} = g_1 = \frac{\eta(\tau)^3\eta(4\tau)\eta(6\tau)^2}{\eta(2\tau)^2\eta(3\tau)\eta(12\tau)^3} \qquad g_2 = \frac{\eta(2\tau)^7\eta(3\tau)}{\eta(\tau)^3\eta(4\tau)^2\eta(12\tau)^2} \qquad g_3 = \frac{\eta(3\tau)^3\eta(4\tau)}{\eta(\tau)\eta(12\tau)^3}$$

$$g_4 = \frac{\eta(4\tau)^4\eta(6\tau)^2}{\eta(2\tau)^2\eta(12\tau)^4} \qquad g_5 = \frac{\eta(\tau)\eta(4\tau)^2\eta(6\tau)^9}{\eta(2\tau)^3\eta(3\tau)^3\eta(12\tau)^6}$$

$\Gamma_0(12)$


$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$
$-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{6}$
0
$\begin{pmatrix}1&0\\12&1\end{pmatrix}$
$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix}5&1\\24&5\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}7&2\\12&7\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}5&2\\12&5\end{pmatrix}$

3. Funktionswerte von A_{12} an den Spitzen s:

$$g_1+3=g_2-3=g_3-1=g_4=g_5+1$$

s	$i\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$
$A_{12}(s)$	∞	0	-6	-4	-3	-2

4. q-Entwicklung der Erzeugenden

$$A_{12}=\frac{1}{q}-3+2q+0q^2+q^3\ldots$$

5. Darstellung von J:

$$J=\frac{(A_{12}^2+12A_{12}+24)^3(A_{12}^6+21\cdot 12A_{12}^5+345\cdot 12A_{12}^4+18\cdot 12^3A_{12}^3+63\cdot 12^3A_{12}^2+9\cdot 12^4A_{12}+6\cdot 12^4)^3}{A_{12}^{12}(A_{12}+6)^3(A_{12}+4)^4(A_{12}+3)^3(A_{12}+2)}$$

6. Darstellung der Transformierten J_{12}:

$$J_{12}=\frac{(A_{12}^2+6A_{12}+6)^3(A_{12}^6+18A_{12}^5+63A_{12}^4+432A_{12}^3+690A_{12}^2+504A_{12}+24)^3}{A_{12}(A_{12}+2)^3(A_{12}+3)^4(A_{12}+4)^3(A_{12}+6)}$$

7. Normalisator $\mathcal{N}_{12}$:

$$(\mathcal{N}_{12}:\Gamma_0(12))=6,\quad \text{Erzeugende: } \begin{pmatrix}9&2\\12&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}4&1\\12&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$$

Transformation	Transformierte
$\begin{pmatrix}0&-1\\12&0\end{pmatrix}$	$A_{12}(-\frac{1}{12z})=\frac{12}{A_{12}(z)}$
$\begin{pmatrix}9&2\\12&3\end{pmatrix}$	$A_{12}(\frac{9z+2}{12z+3})=-3\frac{A_{12}(z)+4}{A_{12}(z)+3}$
$\begin{pmatrix}4&1\\12&4\end{pmatrix}$	$A_{12}(\frac{4z+1}{12z+4})=-4\frac{A_{12}(z)+3}{A_{12}(z)+4}$
$\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$	$A_{12}(z+\frac{1}{2})=-A_{12}-6$

$\Longleftrightarrow A_{12}(z+\frac{1}{2})+3=-(A_{12}(z)+3)$

d.h. die Koeffizienten α_i der q-Entwicklung von $A_{12}+3$ sind =0 für $i\not\equiv 1 \bmod 2$

$\mathbf{\Gamma_0(13)}$

1. Daten:

μ	ϵ_ρ	α_ρ	ϵ_i	α_i	σ_∞
14	2	4	2	6	2

Spitzen	s	$i\infty$	0
Fächerweiten	$\kappa(s)$	1	13

2. Modulfunktionen der Ordnung 1 mit Pol bei $i\infty$:

	$v(0)$	$v(i\infty)$	r_{13}
g_1	1	-1	-2

$$A_{13} = g_1 = \frac{\eta(\tau)^2}{\eta(13\tau)^2}$$

3. Funktionswerte von A_{13} an den Spitzen s:

s	$i\infty$	0
$A_{13}(s)$	∞	0

4. q-Entwicklung der Erzeugenden

$$A_{13} = \frac{1}{q} - 2 - q + 2q^2 + q^3 \ldots$$

5. Darstellung von J:

$$J = \frac{(A_{13}^2 + 5A_{13} + 13)(A_{13}^4 + 19 \cdot 13A_{13}^3 + 20 \cdot 13^2 A_{13}^2 + 7 \cdot 13^3 A_{13} + 13^4)^3}{A_{13}^{13}}$$

6. Darstellung der Transformierten J_{13}:

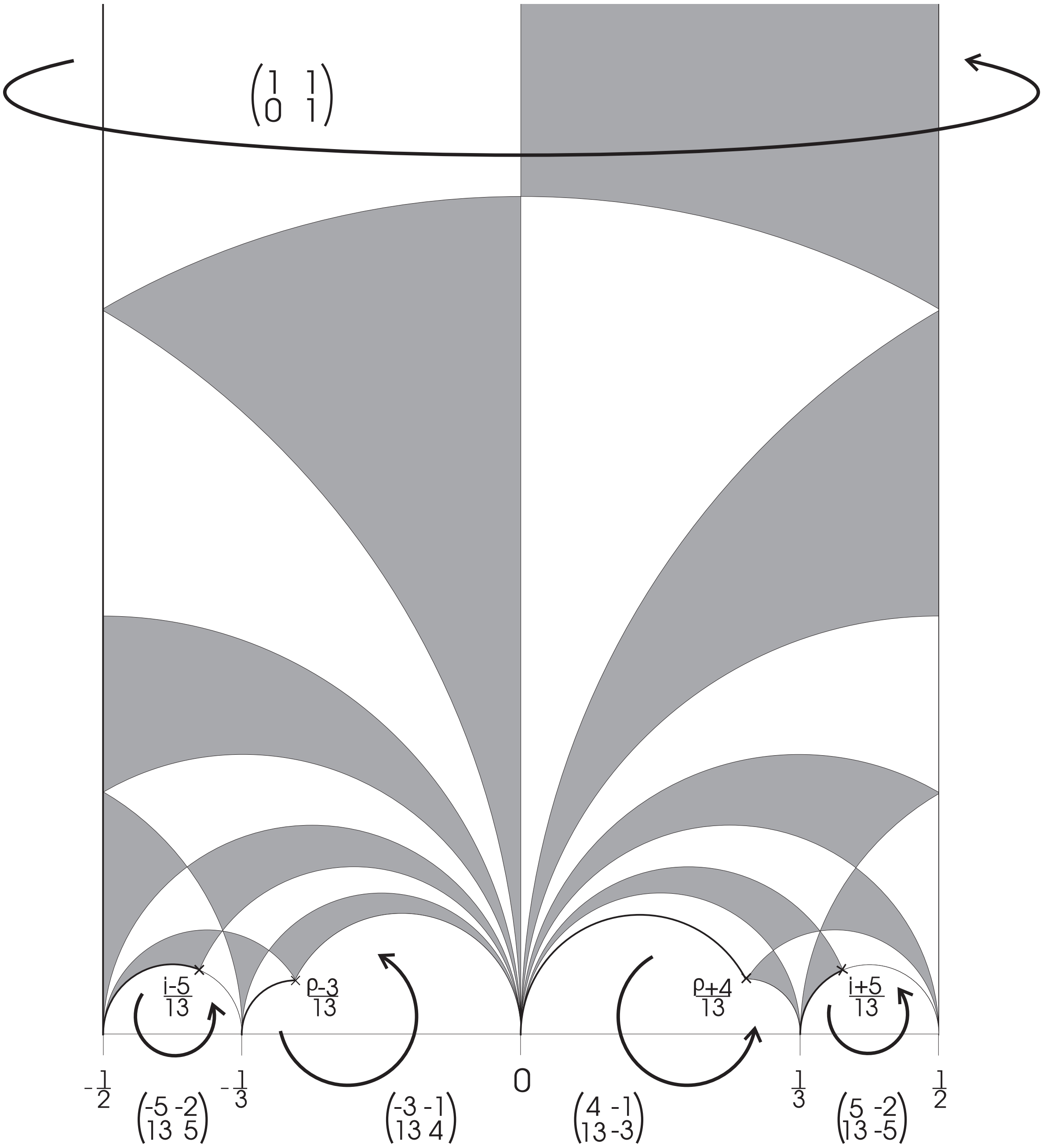
$$J_{13} = \frac{(A_{13}^2 + 5A_{13} + 13)(A_{13}^4 + 7A_{13}^3 + 20A_{13}^2 + 19A_{13} + 1)}{A_{13}}$$

7. Normalisator $\mathcal{N}_{13}$:

$$(\mathcal{N}_{13} : \Gamma_0(13)) = 2, \quad \text{Erzeugende: } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 13 & 0 \end{pmatrix}$$

Transformation	Transformierte
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 13 & 0 \end{pmatrix}$	$A_{13}(-\frac{1}{13z}) = \frac{13}{A_{13}(z)}$

$\Gamma_0(13)$



$\Gamma_0(16)$

1. Daten:

μ	ϵ_ρ	α_ρ	ϵ_i	α_i	σ_∞
24	0	8	0	12	6

Spitzen	s	$i\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
Fächerweiten	$\kappa(s)$	1	16	4	1	1

2. Modulfunktionen der Ordnung 1 mit Pol bei $i\infty$:

	$v(0)$	$v(\frac{1}{2})$	$v(\pm\frac{1}{4})$	$v(\frac{1}{8})$	$v(i\infty)$	r_2	r_4	r_8	r_{16}
g_1	1	0	0	0	-1	-1	0	1	-2
g_2	0	1	0	0	-1	5	-2	1	-2
g_3	0	0	0	1	-1	0	-2	6	-4

$$A_{16} = g_1 = \frac{\eta(\tau)^2\eta(8\tau)}{\eta(2\tau)\eta(16\tau)^2} \qquad g_2 = \frac{\eta(2\tau)^5\eta(8\tau)}{\eta(\tau)^2\eta(4\tau)^2\eta(16\tau)^2} \qquad g_3 = \frac{\eta(8\tau)^6}{\eta(4\tau)^2\eta(16\tau)^4}$$

3. Funktionswerte von A_{16} an den Spitzen s:

$$g_1 + 2 = g_2 - 2 = g_3$$

s	$i\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$A_{16}(s)$	∞	0	-4	$-2(1 \pm i)$	-2

4. q-Entwicklung der Erzeugenden

$$A_{16} = \frac{1}{q} - 2 + 0q + 0q^2 + 2q^3 \dots$$

5. Darstellung von J:

$$J = \frac{(A_{16}^8+2^8A_{16}^7+11\cdot 2^9A_{16}^6+13\cdot 2^{12}A_{16}^5+69\cdot 2^{12}A_{16}^4+7\cdot 2^{17}A_{16}^3+7\cdot 2^{18}A_{16}^2+2^{21}A_{16}+2^{20})^3}{A_{16}^{16}(A_{16}+4)^4(A_{16}+2)(A_{16}^2+4A_{16}+8)}$$

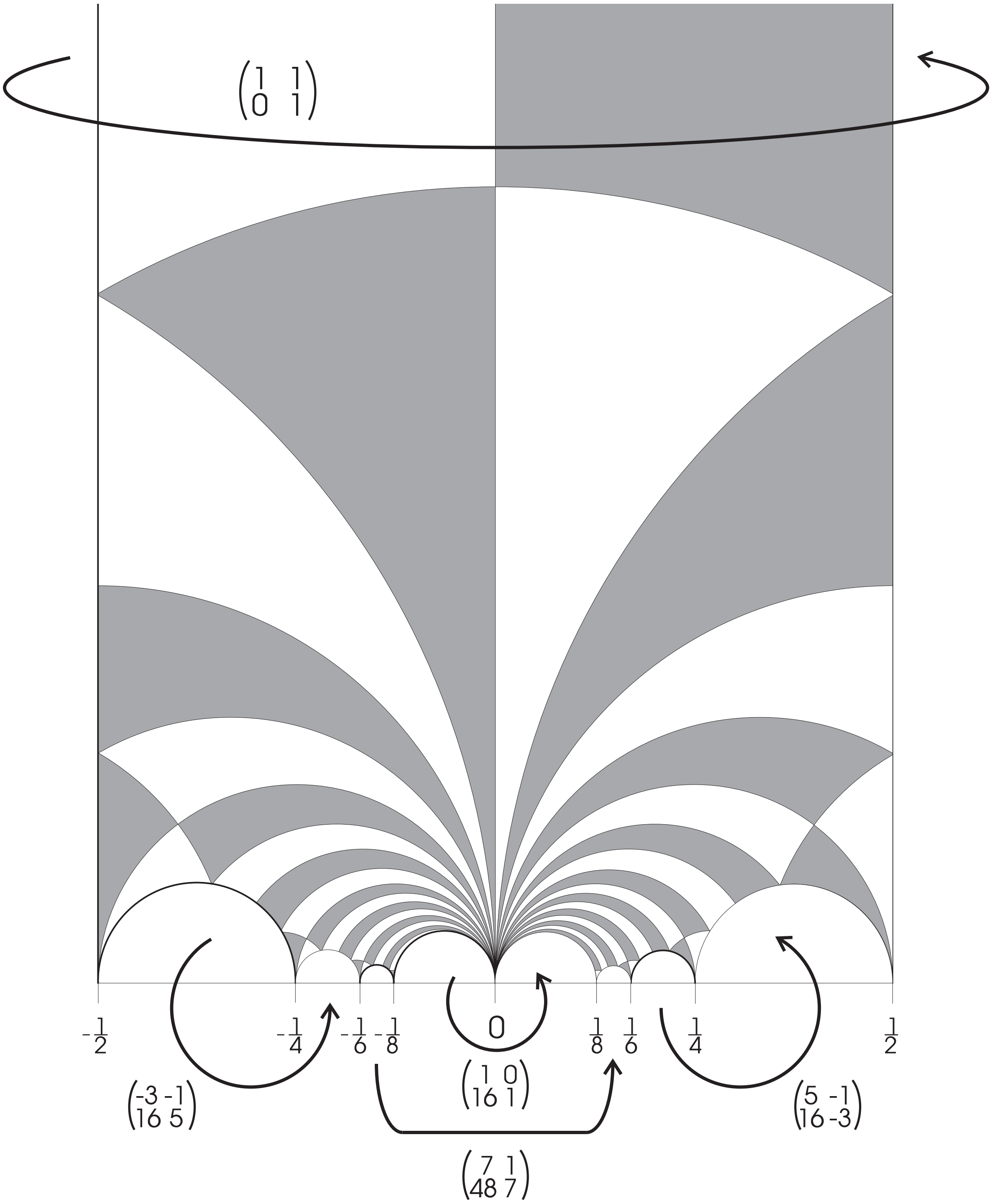
6. Darstellung der Transformierten J_{16}:

$$J_{16} = \frac{(A_{16}^8+2^4A_{16}^7+7\cdot 2^4A_{16}^6+7\cdot 2^6A_{16}^5+69\cdot 2^4A_{16}^4+13\cdot 2^7A_{16}^3+11\cdot 2^7A_{16}^2+2^9A_{16}+2^4)^3}{A_{16}(A_{16}+2)^4(A_{16}+4)(A_{16}^2+4A_{16}+8)}$$

7. Normalisator $\mathcal{N}_{16}$:

$$(\mathcal{N}_{16} : \Gamma_0(16)) = 24, \quad \text{Erzeugende: } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Gamma_0(16)$


$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
$-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{6}$
$-\frac{1}{8}$
0
$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 16 & 5\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 16 & 1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}5 & -1\\ 16 & -3\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}7 & 1\\ 48 & 7\end{pmatrix}$

Transformation	Transformierte
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}$	$A_{16}(-\frac{1}{16z}) = \frac{2^3}{A_{16}(z)}$
$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$A_{16}(z+\frac{1}{4}) = -iA_{16}(z) - 2 - 2i \iff A_{16}(z+\frac{1}{4}) + 2 = -i(A_{16}(z)+2)$

d.h. die Koeffizienten α_i der q-Entwicklung von $A_{16}+2$ sind =0 für $i \not\equiv 3 \bmod 4$

$\Gamma_0(18)$

1. Daten:

μ	ϵ_ρ	α_ρ	ϵ_i	α_i	σ_∞
36	0	12	0	18	8

Spitzen	s	$i\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{3}$	$\pm\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$
Fächerweiten	$\kappa(s)$	1	18	9	2	1	2

2. Modulfunktionen der Ordnung 1 mit Pol bei $i\infty$:

	$v(0)$	$v(\frac{1}{2})$	$v(\pm\frac{1}{3})$	$v(\pm\frac{1}{6})$	$v(\frac{1}{9})$	$v(i\infty)$	r_2	r_3	r_6	r_9	r_{18}
g_1	1	0	0	0	0	-1	-1	-1	1	1	-2
g_2	0	1	0	0	0	-1	2	0	0	1	-2
g_3	0	0	0	0	1	-1	0	-1	1	3	-3

$$A_{18} = g_1 = \frac{\eta(\tau)^2\eta(6\tau)\eta(9\tau)}{\eta(2\tau)\eta(3\tau)\eta(18\tau)^2} \qquad g_2 = \frac{\eta(2\tau)^2\eta(9\tau)}{\eta(\tau)\eta(18\tau)^2} \qquad g_3 = \frac{\eta(6\tau)\eta(9\tau)^3}{\eta(\tau)\eta(18\tau)^3}$$

3. Funktionswerte von A_{18} an den Spitzen s:

$$g_1 + 2 = g_2 - 1 = g_3$$

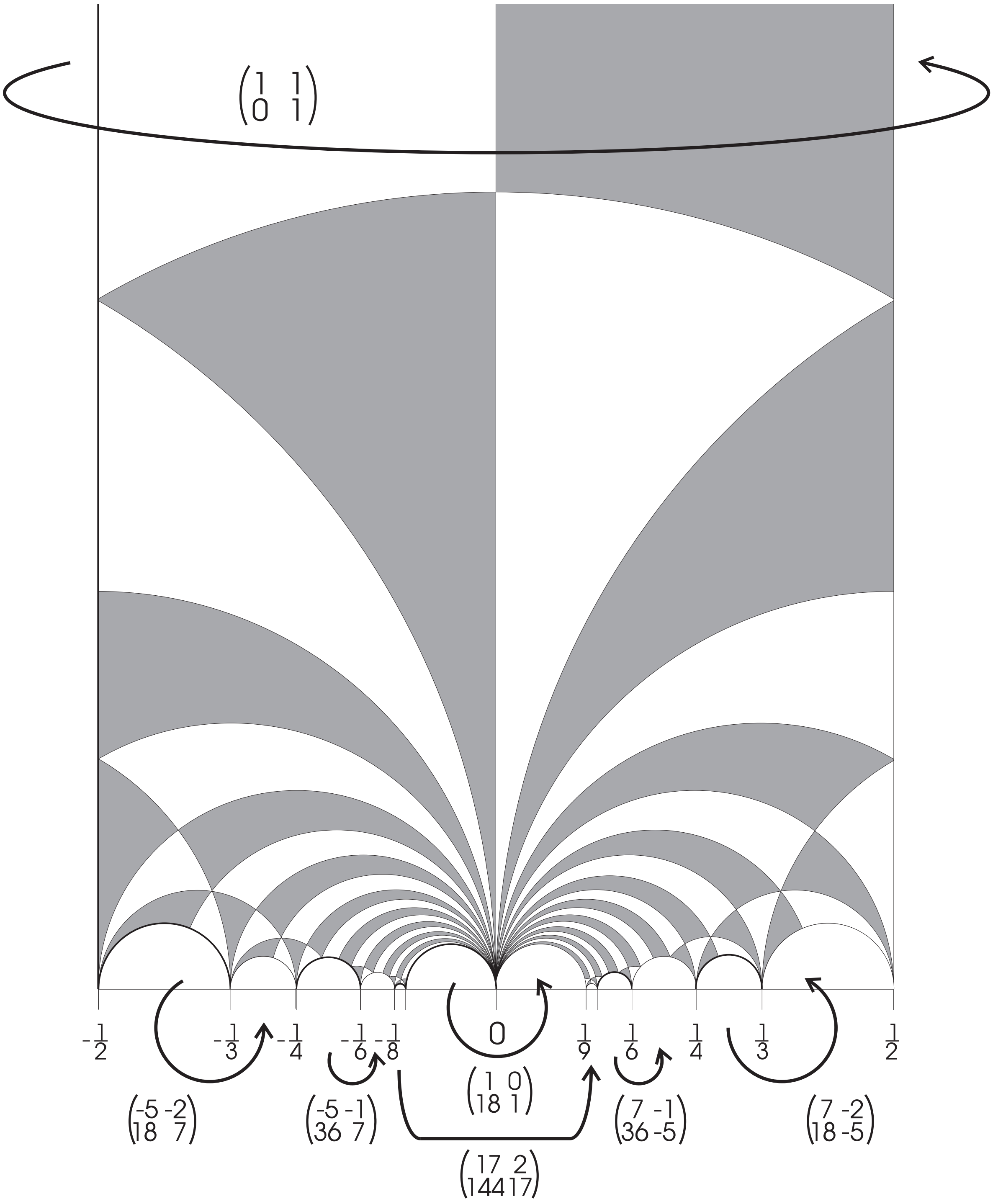
s	$i\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{3}$	$\pm\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$
$A_{18}(s)$	∞	0	-3	$-3 \pm \sqrt{3}i$	$\frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{3}i)$	-2

4. q-Entwicklung der Erzeugenden

$$A_{18} = \frac{1}{q} - 2 + 0q + q^2 + 0q^3 \ldots$$

5. Darstellung von J:

$\Gamma_0(18)$


$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$
$-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{6}$
$-\frac{1}{8}$
0
$\frac{1}{9}$
$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix}1&0\\18&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}-5&-2\\18&7\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}-5&-1\\36&7\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}7&-1\\36&-5\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}7&-2\\18&-5\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}17&2\\144&17\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} J &= U \cdot V \\ U &= (A_{18}^3 + 12A_{18}^2 + 36A_{18} + 36)^3 \\ V &= \frac{(A_{18}^9+28\cdot 3^2A_{18}^8+172\cdot 3^3A_{18}^7+1468\cdot 3^3A_{18}^6+344\cdot 3^6A_{18}^5+32\cdot 3^9A_{18}^4+592\cdot 3^7A_{18}^3+256\cdot 3^8A_{18}^2+64\cdot 3^9A_{18}+64\cdot 3^8)^3}{A_{18}^{18}(A_{18}+2)^2(A_{18}+3)^9(A_{18}^2+6A_{18}+12)^2(A_{18}+3A_{18}+3)} \end{aligned}$$

6. Darstellung der Transformierten J_{18}:

$$\begin{aligned} J_{18} &= U' \cdot V' \\ U' &= (A_{18}^3 + 6A_{18}^2 + 12A_{18} + 6)^3 \\ V' &= \frac{(A_{18}^9+18A_{18}^8+144A_{18}^7+74\cdot 3^2A_{18}^6+8\cdot 3^5A_{18}^5+172\cdot 3^3A_{18}^4+1468\cdot 3A_{18}^3+344\cdot 3^2A_{18}^2+112\cdot 3^2A_{18}+24)^3}{A_{18}(A_{18}+3)^2(A_{18}+2)^9(A_{18}^6+12A_{18}^5+63A_{18}^4+180A_{18}^3+297A_{18}^2+240A_{18}+108)} \end{aligned}$$

7. Normalisator $\mathcal{N}_{18}$:

$$(\mathcal{N}_{18} : \Gamma_0(18)) = 24, \quad \text{Erzeugende: } \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 18 & 2 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 18 & 9 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Transformation	Transformierte
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 18 & 0 \end{pmatrix}$	$A_{18}(-\frac{1}{18z}) = \frac{6}{A_{18}(z)}$
$\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 18 & 2 \end{pmatrix}$	$A_{18}(\frac{10z+1}{18z+2}) = -2\frac{A_{18}(z)+3}{A_{18}(z)+2}$
$\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 18 & 9 \end{pmatrix}$	$A_{18}(\frac{9z+4}{18z+9}) = -3\frac{A_{18}(z)+2}{A_{18}(z)+3}$
$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$A_{18}(z+\frac{1}{4}) = -iA_{18}(z) - 2 - 2i \quad \Longleftrightarrow A_{18}(z+\frac{1}{4}) + 2 = -i(A_{18}(z)+2)$

d.h. die Koeffizienten α_i der q-Entwicklung von $A_{18}+2$ sind =0 für $i \not\equiv 2 \bmod 3$

$\Gamma_0(25)$

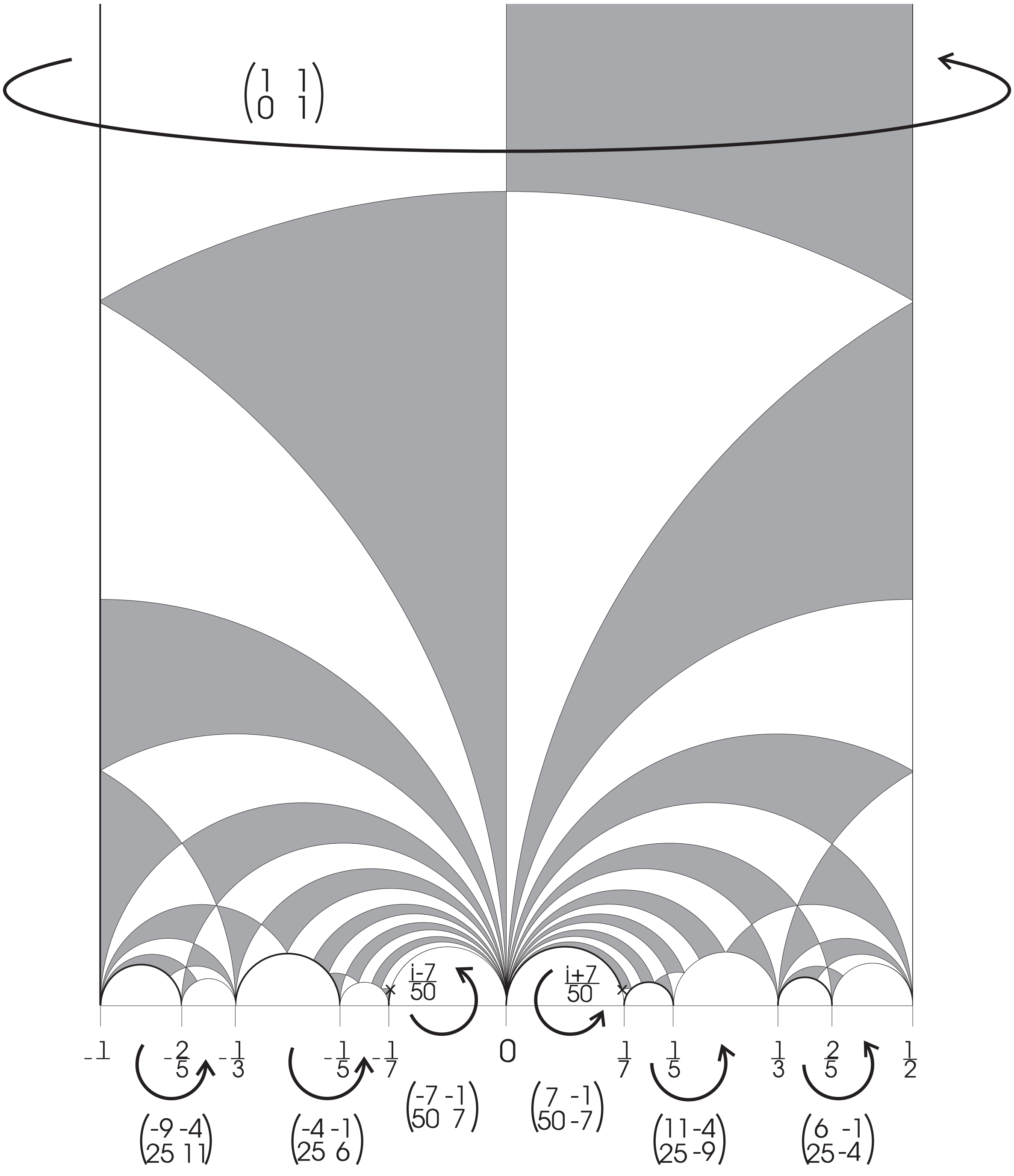
1. Daten:

μ	ϵ_ρ	α_ρ	ϵ_i	α_i	σ_∞
30	0	10	2	14	6

Spitzen	s	$i\infty$	0	$\pm\frac{1}{5}$	$\pm\frac{2}{5}$
Fächerweiten	$\kappa(s)$	1	25	1	1

2. Modulfunktionen der Ordnung 1 mit Pol bei $i\infty$:

$\Gamma_0(25)$


(1 1 / 0 1)
(i-7)/50
(i+7)/50
-1
-2/5
-1/3
-1/5
-1/7
0
1/7
1/5
1/3
2/5
1/2
(-9 -4 / 25 11)
(-4 -1 / 25 6)
(-7 -1 / 50 7)
(7 -1 / 50 -7)
(11 -4 / 25 -9)
(6 -1 / 25 -4)

	$v(0)$	$v(\pm\frac{1}{5})$	$v(\pm\frac{2}{5})$	$v(i\infty)$	r_5	r_{25}
g_1	1	0	0	-1	0	-1

$$A_{25} = g_1 = \frac{\eta(\tau)}{\eta(25\tau}$$

3. Funktionswerte von A_{25} an den Spitzen s:

s	$i\infty$	0	$\pm\frac{1}{5}$	$\pm\frac{2}{5}$
$A_{25}(s)$	∞	0	$\sqrt{5}(-\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}i)$	$\sqrt{5}(-\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}i)$

4. q-Entwicklung der Erzeugenden

$$A_{25} = \frac{1}{q} - 1 - q + 0q^2 + 0q^3 \ldots$$

5. Darstellung von J:

$$J = \frac{(A_{25}^{10}+2\cdot 5^3A_{25}^9+7\cdot 5^4A_{25}^8+56\cdot 5^4A_{25}^7+57\cdot 5^5A_{25}^6+202\cdot 5^5A_{25}^5+21\cdot 5^7A_{25}^4+8\cdot 5^8A_{25}^3+11\cdot 5^8A_{25}^2+2\cdot 5^9A_{25}+5^9)^3}{A_{25}^{25}(A_{25}^4+5A25^3+15A_{25}^2+25A_{25}+25)}$$

6. Darstellung der Transformierten J_{25}:

$$J_{25} = \frac{(A_{25}^{10}+2\cdot 5A_{25}^9+11\cdot 5A_{25}^8+8\cdot 5^2A_{25}^7+21\cdot 5^2A_{25}^6+202\cdot 5^2A_{25}^5+57\cdot 5^2A_{25}^4+56\cdot 5^2A_{25}^3+7\cdot 5^3A_{25}^2+2\cdot 5^3A_{25}+5)^3}{A_{25}(A_{25}^4+5A_{25}^3+15A_{25}^2+25A_{25}+25)}$$

7. Normalisator $\mathcal{N}_{25}$:

$$(\mathcal{N}_{25} : \Gamma_0(25)) = 2, \quad \text{Erzeugende: } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 25 & 0 \end{pmatrix}$$

Transformation	Transformierte
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 25 & 0 \end{pmatrix}$	$A_{25}(-\frac{1}{25z}) = \frac{5}{A_{25}(z)}$

Kapitel IV

Untersuchung des Normalisators von Γ_0(n)

1 Struktur und Geschlecht

Zunächst geben wir noch einmal den Normalisator von $\Gamma_0(n)$ in leicht veränderter Form (gegenüber II.1.5) an. Es sei

$$n = \prod_{i=1}^{r} q_i^{n_i}$$

die Primzerlegung von n und h der größte Teiler von 24 mit $h^2|n$, dann ist der Normalisator $\mathcal{N}_n$ von $\Gamma_0(n)$ in $GL_2^+(\mathbb{R})$ über $\Gamma_0(n)$ gegeben durch

$$\mathcal{N}_n =< W_{q_1^{n_1}}, \ldots, W_{q_r^{n_r}}, S_h > \ ,$$

wobei die

$$W_{q^\alpha} \in \Omega_{q^\alpha} = \left\{ A = \begin{pmatrix} aq^\alpha & b \\ cn & dq^\alpha \end{pmatrix} ; \ \det A = q^\alpha \right\}$$

Involutionen sind (d.h. $W_{q^\alpha}^2 = I$) und

$$S_h = \begin{pmatrix} h & 1 \\ 0 & h \end{pmatrix}$$

eine Translation der Ordnung h ist.

Man nennt

$$\mathcal{N}_n^{(i)} =< W_{q_1^{n_1}}, \ldots, W_{q_r^{n_r}} >$$

den *„involutorischen Normalisator“*; die 2^r Involutionen, die er enthält, sind gegeben durch

$$W_e \in \Omega_e = \left\{ A = \begin{pmatrix} ae & b \\ cn & de \end{pmatrix} ; \ \det(A) = e \right\} \qquad \text{für } e||n \ .$$

Der Normalisator gibt uns die Möglichkeit, $\Gamma_0(n)$ außerhalb der Modulgruppe zu erweitern. Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{R}(n) = \mathbb{H}^*/\Gamma_0(n)$$

die zu $\Gamma_0(n)$ gehörige Riemannsche Fläche. Wenn $\mathcal{U}$ eine beliebige Untergruppe von $\mathcal{N}_n/\Gamma_0(n)$ ist, können wir die erweiterte Gruppe

$$G_{\mathcal{U}} =< \Gamma_0(n), \mathcal{U} >$$

bilden und die zugehörige Riemannsche Fläche

$$\mathbb{H}^*/G_{\mathcal{U}} = \mathcal{R}(n)/\mathcal{U}$$

betrachten. Zur Veranschaulichung nehmen wir uns einen Fundamentalbereich $\mathcal{F}_n$ von $\Gamma_0(n)$. Wenn $|\mathcal{U}| = k$, so zerfällt $\mathcal{F}_n$ bei Operation von $\mathcal{U}$ in k „Fundamentalbereiche" für $G_{\mathcal{U}}$, wobei der Begriff Fundamentalbereich hier außerhalb unserer Definition in I.2.3 liegt (da wir uns außerhalb der Modulgruppe befinden). Ein solcher besteht auch nicht mehr aus ganzen Moduldreiecken, was die konkrete Erstellung schwierig macht, die auch nicht unser Ziel ist.
Ein „Fundamentalbereich "von $G_{\mathcal{U}}$ hat ein System von Randsubstitutionen, diese erzeugen $G_{\mathcal{U}}$ und liefern uns wie in I.2.3 eine Veranschaulichung von $\mathcal{R}(n)/\mathcal{U}$ indem wir äquivalente Randstücke zusammenkleben.

Unser erstes Interesse gilt der Berechnung des Geschlechts von $\mathcal{R}(n)/\mathcal{U}$ (das wir auch als Geschlecht von $\mathcal{U}$ bezeichnen) für einige Untergruppen $\mathcal{U}$. Hierzu verwenden wir die Abbildung

$$\Phi : \mathcal{R}(n) \longrightarrow \mathcal{R}(n)/\mathcal{U}$$

Das Geschlecht $g_{\mathcal{U}}$ von $\mathcal{R}(n)/\mathcal{U}$ ist dann gegeben durch

$$g_{\mathcal{U}} = \frac{1}{|\mathcal{U}|}(g + |\mathcal{U}| - 1 + \frac{1}{2}\sum_P (v_P - 1)) \ ,$$

wobei g das Geschlecht von $\Gamma_0(n)$ ist und v_P die Verzweigungsordnung des Punktes P bei der Abbildung Φ bezeichnet.
Die Verzweigungspunkte von Φ sind genau die Punkte, bei denen sich die Fixgruppe bei der Erweiterung von $\Gamma_0(n)$ zu $< \Gamma_0(n), \mathcal{U} >$ vergrößert, ihre Verzweigungsordnung der Faktor um den das passiert. Es gilt also, die Fixpunkte von Transformationen $A \in G_{\mathcal{U}} \setminus \Gamma_0(n)$ zu bestimmen mit der Ordnung der zugehörigen Fixgruppe. Wenn $A \in G_{\mathcal{U}}$ einen Fixpunkt $\tau \in \mathbb{H}^*$ hat, sind 3 Fälle möglich:

1. τ ist ein elliptischer Fixpunkt τ_ρ bzw. τ_i von $\Gamma_0(n)$
2. τ ist ein parabolischer Fixpunkt von $\Gamma_0(n)$
3. τ ist kein Fixpunkt von $\Gamma_0(n)$.

Unser zweites Interesse gilt den Funktionen für $G_{\mathcal{U}}$, d.h. den Modulfunktionen für $\Gamma_0(n)$, die zusätzlich unter $\mathcal{U}$ invariant sind und somit als Funktionen auf $\mathcal{R}(n)/\mathcal{U}$ interpretiert werden können. Diese bilden den Körper $K_{G_{\mathcal{U}}}$ mit

$$K_{G_{\mathcal{U}}} = K_{<\Gamma_0(n),\mathcal{U}>} \leq K_{\Gamma_0(n)}$$

Im Kapitel III haben wir mit Hilfe des Satzes von Newman Modulfunktionen für $\Gamma_0(n)$ konstruiert:

Satz 31 (Newman) *Sei $n > 1$, $r_\delta \in \mathbb{Z}$ für alle positiven Teiler δ von n und $r_1 = 0$, außerdem*

$$\begin{array}{rll} i) & v(i\infty) = \frac{1}{24}\sum\limits_{\delta|n}(\delta - 1)r_\delta & \in \mathbb{Z} \\ ii) & v(0) \ = \frac{1}{24}\sum\limits_{\delta|n}(\frac{n}{\delta} - n)r_\delta & \in \mathbb{Z} \\ iii) & \prod\limits_{\delta|n}\delta^{r_\delta} \ \textit{ist ein Quadrat in } \mathbb{Z} & \end{array}$$

dann ist

$$g = \prod_{\delta|n}\phi_\delta^{r_\delta} = \prod_{\delta|n}\left(\frac{\eta(\delta\tau)}{\eta(\tau)}\right)^{r_\delta}$$

eine Modulfunktion für $\Gamma_0(n)$.

Wir werden, dort wo es möglich ist, durch Verschärfung der Voraussetzungen eine Möglichkeit schaffen, Funktionen für einige der Gruppen $G_{\mathcal{U}}$ zu konstruieren.
Von besonderem Interesse wird, wie in Kapitel III, der Fall sein, wo das Geschlecht von $K_{G_{\mathcal{U}}} = 0$ ist. In diesen Fällen wird der Funktionenkörper $K_{G_{\mathcal{U}}}$ von einer Funktion F der Ordnung 1 direkt über $\mathbb{C}$ erzeugt

$$K_{G_{\mathcal{U}}} = \mathbb{C}(F) \ .$$

Die Erzeugende F ist auch charakterisiert durch:

- F ist Modulfunktion für $\Gamma_0(n)$,
- F ist invariant unter $\mathcal{U}$,
- als Modulfunktion für $\Gamma_0(n)$ hat F die Ordnung $|\mathcal{U}| = k$.

Wo es möglich ist, werden wir die Erzeugende berechnen.

2 Die Fricke-Involution W_n

2.1 Geschlecht

Eine der 2^r Involutionen von $\mathcal{N}_n^{(i)}$ ist gegeben durch

$$W_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ n & 0 \end{pmatrix} \in \Omega_n = \left\{ A = \begin{pmatrix} an & b \\ cn & dn \end{pmatrix} ; \ \det(A) = n \right\}$$

und heißt „*Fricke-Involution*“.
Die Gruppe $G_n =< \Gamma_0(n), W_n >$ ist eine Erweiterung von $\Gamma_0(n)$ des Grades 2. Robert Fricke untersuchte diese Gruppe ausführlich in [F1],[F2]. Er berechnete die Anzahl a der Fixpunkte (die natürlich alle die Verzweigungsordnung 2 haben) als

$$a = \begin{cases} h(-n) + h(-4n) & n \equiv 3 \bmod 4 \\ h(-4n) & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $h(d)$ die Klassenzahl des algebraischen Zahlkörpers der Diskriminante d bezeichnet.
Damit ergibt sich für das Geschlecht g_n von G_n

$$g_n = \frac{1}{2}(g - 1 - \frac{1}{2}a)$$

wobei g das Geschlecht von $\Gamma_0(n)$ bezeichnet.
Man berechnet (für die Vollständigkeit der Liste siehe [Kl]):

$$\begin{aligned} g_n = 0 \Longleftrightarrow n \in & \{1 \ldots 10, 12, 13, 16, 18, 25\} & (g = 0) \\ \cup & \{11, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 23, 24, 26, 27, 29, \\ & 31, 32, 35, 36, 39, 41, 47, 49, 50, 59, 71\} \ . \end{aligned}$$

2.2 Funktionen

Es sei g eine Modulfunktion für $\Gamma_0(n)$, die mit Newman konstruiert wurde, also der Gestalt

$$g(\tau)=\prod_{\delta|n}\phi_\delta^{r_\delta}(\tau)=\eta(\tau)^{-\sum\limits_{\delta|n} r_\delta}\prod_{\delta|n}\eta(\delta\tau)^{r_\delta}\ .$$

Wir wollen untersuchen, unter welchen Bedingungen g invariant unter W_n ist. Es ist

$$\eta(\delta(-\frac{1}{n\tau}))=\eta(-\frac{1}{\frac{n}{\delta}\tau})=(-i\frac{n}{\delta}\tau)^{\frac{1}{2}}\eta(\frac{n}{\delta}\tau)$$

und damit

$$g(-\frac{1}{n\tau})=C\cdot\eta(n\tau)^{-\sum\limits_{\delta|n} r_\delta}\prod_{\delta|n}\eta(\frac{n}{\delta}\tau)^{r_\delta}$$

mit

$$\begin{aligned} C &= (-in\tau)^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{\delta|n} r_\delta}\prod_{\delta|n}(-i\frac{n}{\delta}\tau)^{\frac{1}{2}r_\delta} \\ &= n^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{\delta|n} r_\delta}\prod_{\delta|n}(\frac{n}{\delta})^{\frac{1}{2}r_\delta} \\ &= \prod_{\delta|n}(\frac{1}{\delta})^{\frac{1}{2}r_\delta}\ . \end{aligned}$$

Als notwendige Bedingungen für $g(-\frac{1}{n\tau})=g(\tau)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} r_\delta &= r_{\frac{n}{\delta}} \qquad \delta\neq 1,n \\ r_n &= -\sum_{\delta|n} r_\delta \\ \Longleftrightarrow\ r_n &= -\frac{1}{2}\sum_{\substack{\delta|n\\ \delta\neq n}} r_\delta\ . \end{aligned}$$

Wir zeigen, daß mit diesen Bedingungen $\prod\limits_{\delta|n}\delta^{r_\delta}=1$ ist, also ist $C=1$ und die Bedingung *iii)* in Newman's Satz wird überflüssig.

1.Fall: n ist kein Quadrat

$$\begin{aligned} \prod_{\delta|n}\delta^{r_\delta} &= n^{r_n}\prod_{\substack{\delta|n\\ \delta<\sqrt{n}}}\delta^{r_\delta}(\frac{n}{\delta})^{r_{\frac{n}{\delta}}} \\ &= n^{r_n}\prod_{\substack{\delta|n\\ \delta<\sqrt{n}}} n^{r_\delta} \\ &= n^e \\ \text{mit}\qquad e &= r_n+\sum_{\substack{\delta|n\\ \delta<\sqrt{n}}} r_\delta\ . \end{aligned}$$

Wegen $\sum\limits_{\delta|n} r_\delta=2\sum\limits_{\substack{\delta|n\\ \delta<\sqrt{n}}} r_\delta+r_n$ und $r_n=-\sum\limits_{\delta|n} r_\delta$:

$$e=r_n+\frac{1}{2}(\sum_{\delta|n} r_\delta-r_n)=\frac{1}{2}(r_n+\sum_{\delta|n} r_\delta)=0$$

2.Fall: n ist Quadrat

$$\begin{aligned}
\prod_{\delta|n}\delta^{r_\delta} &= \sqrt{n}^{r_{\sqrt{n}}}n^{r_n}\prod_{\substack{\delta|n\\ \delta<\sqrt{n}}}\delta^{r_\delta}\left(\frac{n}{\delta}\right)^{r_{\frac{n}{\delta}}}\\
&= \sqrt{n}^{r_{\sqrt{n}}}n^{r_n}\prod_{\substack{\delta|n\\ \delta<\sqrt{n}}}n^{r_\delta}\\
&= n^e\\
\text{mit}\qquad e &= \frac{1}{2}r_{\sqrt{n}}+r_n+\sum_{\substack{\delta|n\\ \delta<\sqrt{n}}}r_\delta\ .
\end{aligned}$$

Wegen $\sum_{\delta|n}r_\delta = 2\sum_{\substack{\delta|n\\ \delta<\sqrt{n}}}r_\delta + r_{\sqrt{n}}+r_n$:

$$e=\frac{1}{2}r_{\sqrt{n}}+r_n+\frac{1}{2}\Big(\sum_{\delta|n}r_\delta-r_n-r_{\sqrt{n}}\Big)=\frac{1}{2}\Big(r_n+\sum_{\delta|n}r_\delta\Big)=0\ .$$

Satz 32 *Es seien die Bedingungen aus dem Satz von Newman erfüllt (außer iii)) und es gelte zusätzlich*

$$\begin{aligned}
r_\delta &= r_{\frac{n}{\delta}}\\
r_n &= -\frac{1}{2}\sum_{\substack{\delta|n\\ \delta\neq n}}r_\delta\ ,
\end{aligned}$$

dann ist

$$g=\prod_{\delta|n}\phi_\delta^{r_\delta}$$

eine Funktion für $<\Gamma_0(n),W_n>$.

Damit lassen sich nun viele der erzeugenden Funktionen B_n für $K_{<\Gamma_0(n),W_n>}$ im Fall Geschlecht $g_n=0$ berechnen. Eine solche Erzeugende ist dadurch charakterisiert, daß sie als Modulfunktion für $\Gamma_0(n)$ betrachtet die Ordnung 2 hat.

Beispiel: $n=14$

$\Gamma_0(14)$ hat 4 Spitzen : $i\infty$, 0 , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{7}$
mit den Weiten κ_{14} : 1 , 14 , 7 , 2

Es ist

$$i\infty \overset{W_{14}}{\sim} 0,\ \frac{1}{2}\overset{W_{14}}{\sim}\frac{1}{7}\ .$$

Wir legen den Pol bei $i\infty$ und die Nullstelle bei $\frac{1}{2}$ fest.

$$\begin{aligned}
v\Big(\frac{1}{2}\Big) &= \frac{1}{24}\sum_{\delta|14}\frac{7}{\delta}((\delta,2)^2-\delta)r_\delta\\
&= \frac{1}{24}(7r_2-6r_7-5r_{14})\\
&\quad\ (r_7=r_2,\ r_{14}=-\frac{1}{2}(r_2+r_7)=-r_2)\\
&= \frac{1}{4}r_2\ .
\end{aligned}$$

Diese Gleichung genügt bereits (denn es ist $v(0) = v(i\infty),\ v(\frac{1}{2}) = v(\frac{1}{7}),\ \sum v(s) = 0$) und wir erhalten

$$r_2 = 4,\ r_7 = 4,\ r_{14} = -4,$$

also

$$B_{14} = \frac{\eta(2\tau)^4\eta(7\tau)^4}{\eta(\tau)^4\eta(14\tau)^4}\ .$$

Auf diese Weise berechnen wir alle Erzeugenden B_n für „n nicht prim “und $n \neq 27, 49$. Für $n = 27, 49$ lassen sich nur Funktionen gewinnen, die für $< \Gamma_0(n), W_n >$ die Ordnung 2 haben; im Fall „n prim “haben wir nur den Baustein $\phi_n = \frac{\eta(n\tau)}{\eta(\tau)}$ zur Verfügung und bekommen nur Funktionen noch höherer Ordnung.

In der Tabelle bezeichnet B_n die erzeugende Funktion für $G_n =< \Gamma_0(n), W_n >$:

$$K_{G_n} = \mathbb{C}(B_n)\ .$$

Der Pol von B_n liegt in allen Fällen bei $i\infty$, die Nullstelle ist angegeben. Es sind nur die Fälle berechnet, in denen nicht schon $g = 0$ ist, da sich dann B_n als Polynom zweiten Grades der für $\Gamma_0(n)$ Erzeugenden A_n gewinnen läßt (siehe Kapitel IV wo die A_n berechnet wurden).

n	B_n	Nst	n	B_n	Nst
14	$\frac{\eta(2\tau)^4\eta(7\tau)^4}{\eta(\tau)^4\eta(14\tau)^4}$	$\frac{1}{2}$	26	$\frac{\eta(2\tau)^2\eta(13\tau)^2}{\eta(\tau)^2\eta(26\tau)^2}$	$\frac{1}{2}$
15	$\frac{\eta(3\tau)^3\eta(5\tau)^3}{\eta(\tau)^3\eta(15\tau)^3}$	$\frac{1}{3}$	32	$\frac{\eta(2\tau)^3\eta(16\tau)^3}{\eta(\tau)^2\eta(4\tau)\eta(8\tau)\eta(32\tau)^2}$	$\frac{1}{2}$
18	$\frac{\eta(2\tau)^3\eta(9\tau)^3}{\eta(\tau)^3\eta(18\tau)^3}$	$\frac{1}{2}$	35	$\frac{\eta(5\tau)\eta(7\tau)}{\eta(\tau)\eta(35\tau)}$	$\frac{1}{5}$
20	$\frac{\eta(4\tau)^2\eta(5\tau)^2}{\eta(\tau)^2\eta(20\tau)^2}$	$\frac{1}{4}$	36	$\frac{\eta(4\tau)\eta(9\tau)}{\eta(\tau)\eta(36\tau)}$	$\frac{1}{4}$
21	$\frac{\eta(3\tau)^2\eta(7\tau)^2}{\eta(\tau)^2\eta(21\tau)^2}$	$\frac{1}{3}$	39	$\frac{\eta(3\tau)\eta(13\tau)}{\eta(\tau)\eta(39\tau)}$	$\frac{1}{3}$
24	$\frac{\eta(2\tau)\eta(3\tau)^2\eta(8\tau)^2\eta(12\tau)}{\eta(\tau)^2\eta(4\tau)\eta(6\tau)\eta(24\tau)^2}$	$\frac{1}{3}$	50	$\frac{\eta(2\tau)\eta(25\tau)}{\eta(\tau)\eta(50\tau)}$	$\frac{1}{2}$

3 Der involutorische Normalisator $\mathcal{N}_n^{(i)}$

In [Kl] wird der gesamte involutorische Normalisator $\mathcal{N}_n^{(i)}$ behandelt. Zunächst wird dort die Anzahl $a(n, e)$ der Verzweigungspunkte bei Erweiterung von $\Gamma_0(n)$ um eine beliebige Involution $W_e,\ e||n$ berechnet.

Satz 33 *Die Anzahl $a(n, e)$ der Verzweigungspunkte bei Erweiteung von $\Gamma_0(n)$ um eine beliebige Involution W_e, $e||n$, berechnet sich wie folgt:*

1. $n \geq 5$:

$$\nu(n, n) = \begin{cases} h(-4n) & n \not\equiv 3 \ mod\ 4 \\ h(-4n) + h(-n) & n \equiv 3 \ mod\ 4 \end{cases}$$

2. $k \geq 5$ und ungerade:

$$\nu(2^\lambda k, k) = \begin{cases} h(-4k) & k \equiv 1 \; mod\, 4 \;,\; \lambda = 1 \\ 0 & k \equiv 1 \; mod\, 4 \;,\; \lambda > 1 \\ h(-4k) + 3h(-k) & k \equiv 3 \; mod\, 4 \;,\; \lambda = 1 \\ 2h(-4k) + 2(1 + (\frac{-k}{2}))h(-k) & k \equiv 3 \; mod\, 4 \;,\; \lambda = 2 \\ 2(1 + (\frac{-k}{2}))\nu(k,k) & k \equiv 3 \; mod\, 4 \;,\; \lambda > 2 \end{cases}$$

3. $k \geq 5$, k' ungerade und $(k, 2^\lambda k) = 1$ $\quad (\lambda = 0, 1, 2 \ldots)$:

$$\nu(kk'2^\lambda, k) = \prod_{p|k'} (1 + (\frac{-k}{p}))\nu(2^\lambda k, k)$$

4. (a) k' ungerade:

$$\nu(2k', 2) = \prod_{p|m'} (1 + (\frac{-1}{p})) + \prod_{p|m'} (1 + (\frac{-2}{p}))$$

(b) $(k', 3 \cdot 2^\lambda) = 1$:

$$\nu(3 \cdot 2^\lambda k', 3) = \begin{cases} 2 \prod_{p|k'} (1 + (\frac{-3}{p})) & \lambda = 0, 1, 2 \\ 0 & \lambda > 2 \end{cases}$$

(c) k' ungerade:

$$\nu(4k', 4) = \prod_{p|k'} (1 + (\frac{-1}{p})) + \sum_{d|k'} \phi((d, k'd^{-1})) \; .$$

Sei jetzt $\mathcal{U}$ eine beliebige Untergruppe von $\mathcal{N}_n^{(i)}$ der Ordnung 2^s, $1 \leq s \leq r$. Ein Punkt ist Verzweigungspunkt für $\mathcal{U}$ genau dann, wenn er Fixpunkt für ein $W_e \in \mathcal{U}$ ist. Hätten $W_e, W_{e'}$ denselben Fixpunkt τ, so hätte dieser eine Fixgruppe zyklisch der Ordnung 4 in $\mathcal{U}$ was unmöglich ist. Also haben alle Verzweigungspunkte die Verzweigungsordnung 2 und das Geschlecht $g_\mathcal{U}$ von $\mathcal{U}$ berechnet sich durch

$$g_\mathcal{U} = \frac{1}{2^s}(g + 2^s - 1 - \frac{1}{2} \sum_{W_e \in \mathcal{U}} a(n, e)) \; .$$

In [H] werden für quadratfreie n (vermutlich alle) Fälle berechnet, in denen das Geschlecht von $< \Gamma_0(n), \mathcal{N}_n^{(i)} > = 0$ ist.

4 Die Translationen S_h

4.1 Allgemeines

Wie wir in Abschnitt 1 gesehen haben, gehört zum Erzeugendensystem von $\mathcal{N}_n$ neben den Involutionen auch eine Translation, nämlich $S_h = \begin{pmatrix} h & 1 \\ 0 & h \end{pmatrix}$, wobei h der größte Teiler von 24 ist mit $h^2|n$. Der Grund dafür, daß gerade diese h auftreten, ist, daß die Teiler von 24 genau die Zahlen h sind, für die gilt

$$uv \equiv 1 \text{ mod } h \Longrightarrow u \equiv v \text{ mod } h \; .$$

Mit $S_h \in \mathcal{N}_n$ und $h'|h$ ist natürlich auch $S_{h'} \in \mathcal{N}_n$ und wir haben

$$S_h \in \mathcal{N}_n \Longleftrightarrow h^2|n \; .$$

In diesem Fall stellt

$$G_h =< \Gamma_0(n), S_h >$$

eine zyklische Gruppenerweiterung der Ordnung h von $\Gamma_0(n)$ dar.

4.2 Funktionen

Es sei wieder g eine Modulfunktion für $\Gamma_0(n)$, die mit Newman konstruiert wurde, also der Gestalt

$$g(\tau) = \prod_{\delta|n} \phi_\delta^{r_\delta}(\tau) = \eta(\tau)^{-\sum\limits_{\delta|n} r_\delta} \prod_{\delta|n} \eta(\delta\tau)^{r_\delta} \, .$$

Wir untersuchen, unter welchen Bedingungen g invariant unter S_h ist. Damit

$$\eta(\delta(\tau + \frac{1}{h})) = \eta(\delta\tau + \frac{\delta}{h})$$

transformierbar ist, muß $h|\delta$ gelten. Das ergibt als notwendige Bedingungen

$$\begin{aligned} r_\delta &= 0 \qquad h \nmid \delta \\ -\sum_{\delta|n} r_\delta &= 0 \, . \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} g(\tau + \frac{1}{h}) &= \prod_{\delta|n} \eta(\delta(\tau + \frac{1}{h}))^{r_\delta} \\ &= \prod_{\delta|n} e^{\frac{\pi i}{12} \cdot \frac{\delta}{h} \cdot r_\delta} \eta(\delta\tau)^{r_\delta} \\ &= e^{\frac{\pi i}{12} \sum\limits_{\delta|n} \frac{\delta}{h} r_\delta} g(\tau) \end{aligned}$$

Es bleibt sicherzustellen, daß der Faktor $= 1$ wird. Wir berechnen unter Berücksichtigung von $-\sum\limits_{\delta|n} r_\delta = 0$:

$$\sum_{\delta|n} \frac{\delta}{h} r_\delta = \frac{1}{h} \sum_{\delta|n} \delta r_\delta \equiv 0 \text{ mod } 24 \Longleftrightarrow \frac{1}{24} \sum_{\delta|n} (\delta - 1) r_\delta \in h\mathbb{Z}$$

Dieses Ergebnis ist auch anschaulich klar: $i\infty$ ist Fixpunkt mit Fixgruppe $< S_h >$ der Ordnung h, damit hat jede Modulfunktion für $G_h =< \Gamma_0(n), S_h >$ als Koeffizienten in ihrer q-Entwicklung $a_n = 0$ für $h \nmid n$. Die Bedingung $i)$ aus Newman's Satz wird dadurch überflüssig.

Satz 34 *Es seien die Bedingungen aus dem Satz von Newman erfüllt (außer i)) und es gelte zusätzlich*

$$\begin{aligned} r_\delta &= 0 \qquad h \nmid \delta \\ -\sum_{\delta|n} r_\delta &= 0 \, , \end{aligned}$$

$$\frac{1}{24} \sum_{\delta|n} (\delta - 1) r_\delta \in h\mathbb{Z},$$

dann ist

$$g = \prod_{\delta|n} \phi_\delta^{r_\delta}$$

eine Funktion für $< \Gamma_0(n), S_h >$

4.3 Die Translation S_3

Die Transformation $S_3 = \left(\begin{smallmatrix}3&1\\0&3\end{smallmatrix}\right)$ liegt im Normalisator von $\Gamma_0(n)$ genau dann, wenn $9|n$. In diesem Fall ist

$$G_3 = <\Gamma_0(n), S_3>$$

eine zyklische Erweiterung der Ordnung 3. Die gesamte Restklasse $\Gamma_0(n)\cdot S_3$ ist gegeben durch die Transformationen

$$A = \begin{pmatrix}3a & a+3b\\ 3nc & 3d\end{pmatrix} \text{ mit } \det(A) = 9ad - 3nc(a+3b) = 9\ .$$

Die letzte Gleichung liefert uns

$$ad - \frac{n}{3}c(a+3b) = 1 \Longrightarrow ad \equiv 1 \bmod 3 \Longrightarrow a \equiv d \bmod 3\ . \qquad (*)$$

Die Restklasse $\Gamma_0(n)\cdot S_3^2$ ist gegeben durch die Transformationen

$$A = \begin{pmatrix}3a & 2a+3b\\ 3nc & 3d\end{pmatrix} \text{ mit } \det(A) = 9ad - 3nc(2a+3b) = 9$$

Es genügt Fixpunkte in $\Gamma_0(n)\cdot S_3$ zu suchen, da

$$\tau \text{ Fixpunkt von } A \in \Gamma_0(n)\cdot S_3^2 \Longrightarrow \tau \text{ Fixpunkt von } A^2 \in \Gamma_0(n)\cdot S_3$$

Sei also eine beliebige Transformation $A = \begin{pmatrix}3a & a+3b\\ 3nc & 3d\end{pmatrix} \in \Gamma_0(n)\cdot S_3$ gegeben. Dann ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3(a^2+ad-1) & (a+3b)(a+d)\\ 3nc(a+d) & 3(d^2+ad-1)\end{pmatrix} \qquad \det(A^2) = 9$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} a(a+d)^2 - 2a - d & \frac{1}{3}(a+3b)((a+d)^2-1)\\ nc((a+d)^2-1) & d(a+d)^2 - a - 2d\end{pmatrix} \in \Gamma_0(n)$$

und

$$\mathrm{Spur}(A^3) = (a+d)^3 - 3(a+d) = (a+d)((a+d)^2-3)\ .$$

1.Fall: A hat einen der elliptischen Punkte von $\Gamma_0(n)$ als Fixpunkt, also ist dieser auch Fixpunkt von A^3 und daher ist $\mathrm{Spur}(A^3) = 0$ oder $= \pm 1$. Aus $\mathrm{Spur}(A^3) = 0$ folgt $a + d = 0$, was $(*)$ widerspricht, $\mathrm{Spur}(A^3) = \pm 1$ ist offensichtlich unmöglich.

2.Fall: A hat einen elliptischen Fixpunkt, der kein Fixpunkt von $\Gamma_0(n)$ ist, dann ist $A^3 = I$, also $|a+d| = 1$ also o.B.d.A. $a + d = 1$ ($a + 3b = 0$ liefert $a \equiv 0 \bmod 3$, was $(*)$ widerspricht). In diesem Fall gilt, wie man leicht nachrechnet

$$A = \begin{pmatrix}3a & a+3b\\ 3nc & 3d\end{pmatrix} \text{ hat Fixpunkt } \tau \Longrightarrow A' = \begin{pmatrix}a & a+3b\\ \frac{n}{3}c & d\end{pmatrix} \in \Gamma_0(\frac{n}{3}) \text{ hat Fixpunkt } 3\tau$$

und wegen $\mathrm{Spur}(A') = 1$ ist 3τ ein elliptischer Fixpunkt τ_ρ von A'.
Sei umgekehrt $A = \left(\begin{smallmatrix}a & b\\ \frac{n}{3}c & d\end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(\frac{n}{3})$ eine Transformation mit $a + d = 1$, $ad - \frac{n}{3}bc = 1$ und dem elliptischen Fixpunkt τ_ρ. Angenommen es wäre $b \equiv 0 \bmod 3$, $b = 3b'$. Dann wäre $A' = \left(\begin{smallmatrix}a & b'\\ nc & d\end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(n)$, $a + d = 1$. Also hätte A' einen elliptischen Fixpunkt, was für $9|n$ unmöglich ist (siehe II.1.1). Damit ist $B = \left(\begin{smallmatrix}3a & b\\ 3nc & 3d\end{smallmatrix}\right) \in G_3$ (genauer: $B \in \Gamma_0(n)\cdot S_3$ wenn $b \equiv a \bmod 3$, $B \in \Gamma_0(n)\cdot S_3^2$ sonst) und B hat den Fixpunkt $\frac{\tau_\rho}{3}$. Wir können also folgern:

Die Anzahl e_3 der elliptischen Verzweigungspunkte der Erweiterung G_3 ist $\epsilon_\rho(\frac{n}{3})$.

3.Fall: A hat einen parabolischen Punkt (Punkt $\in \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$) als Fixpunkt. Damit ist $|a+d| = 2$ also o.B.d.A. $a+d=2$. Ist $c=0$ erhalten wir als Fixpunkt $i\infty$ mit zugehöriger Fixgruppe $< S_3 >$; ist $c \neq 0$ erfüllt ein evtl. Fixpunkt τ die Gleichungen

$$\begin{aligned} & 3nc\tau^2 + (3d-3a)\tau - (a+3b) = 0 \\ \iff \quad & 3nc\tau^2 + 6(1-a)\tau - (a+3b) = 0 \\ \implies \quad & \tau = \frac{a-1}{nc} \ . \end{aligned}$$

Die Frage ist jetzt, welche der Spitzen von $\Gamma_0(n)$ sich auf diese Weise darstellen lassen. Hierzu verwenden wir die Ergebnisse aus II.1.2.

Sei $n = 3^\alpha k,\ (3,k)=1,\ \alpha \geq 2$ und $s = \dfrac{t}{3^\beta k},\ (3,t) = 1,\ 0 \leq \beta \leq \alpha$ eine beliebige Spitze von $\Gamma_0(n)$. Dann ist

$$\begin{aligned} & \frac{a-1}{nc} = \frac{t}{3^\beta k} \\ \iff \quad & 3^\beta k(a-1) = tnc \\ \iff \quad & a = 3^{\alpha-\beta}tc + 1 \ . \end{aligned}$$

Einsetzen in die Gleichung für die Determinante

$$ad - \frac{n}{3}c(a+3b) = 1$$

und Berücksichtigung von $d = 2-a$ liefert

$$\begin{aligned} & (3^{\alpha-\beta}tc+1)(-3^{\alpha-\beta}tc+1) - 3^{\alpha-1}kc(3^{\alpha-\beta}tc+1+3b) = 1 \\ \iff \quad & 1 - 3^{2\alpha-2\beta}t^2c^2 - 3^{2\alpha-\beta-1}ktc^2 - 3^{\alpha-1}kc - 3^\alpha kbc = 1 \\ \iff \quad & tc(3^{2\alpha-2\beta}t - 3^{2\alpha-\beta-1}k) - 3^\alpha kb = 3^{\alpha-1}k \ . \end{aligned}$$

Wenn $\beta = 0$ ist, folgt $3|k$ W!!. Für $\beta \geq 1$ ist $2\alpha - 2\beta \leq 2\alpha - \beta - 1$ und wir erhalten als notwendige Bedingung für die Lösbarkeit der Gleichung

$$\begin{aligned} 3^{2\alpha-2\beta} | 3^{\alpha-1} \quad \iff \quad & 2\alpha - 2\beta \leq \alpha - 1 \\ \iff \quad & 2\beta \geq \alpha + 1 \ . \end{aligned}$$

Wir dividieren durch $3^{2\alpha-2\beta}$ und erhalten

$$tc(t - 3^{\beta-1}k) - 3^{2\beta-\alpha}kb = 3^{2\beta-\alpha-1}k \ .$$

Diese Gleichung ist wegen

$$d|t(t-3^{\beta-1}k) \text{ und } d|3^{2\beta-\alpha}k \implies d|k$$

immer in b, c lösbar. Wir fassen zusammen:

Es sind genau die Spitzen $s = \frac{a}{b}$ von $\Gamma_0(n)$ Verzweigungspunkte, für die gilt: $3^\beta || b$ und $2\beta \geq \alpha + 1$.

Deren Anzahl p_3 berechnen wir mit Hilfe von Formeln aus II.1.2:

Die Anzahl der Spitzen $s = \frac{a}{b} \in \mathcal{S}_n$ mit $p^i || b$ ist

$$\begin{array}{ll} \phi(p^i) & 1 \leq i \leq \frac{\alpha}{2} \\ \phi(p^{\alpha-i}) & \frac{\alpha}{2} \leq i \leq \alpha \end{array}$$

wobei wir $0 \sim 1$ als Spitze mit Nenner 1 und $i\infty \sim \frac{1}{n} = \frac{1}{p^\alpha k}$ als Spitze mit $p^\alpha|$Nenner betrachten.

$n = 3^\alpha k,\ (3,k) = 1,\ \alpha \geq 2$:

$\alpha = 2\gamma + 1$: Hier ist $\sigma_\infty(n) = 2 \cdot 3^\gamma \sigma_\infty(k)$. Die gesuchten Spitzen sind genau die, die im Nenner mindestens $3^{\gamma+1}$ als Teiler haben, also

$$\begin{aligned} p_3 &= (\phi(3^\gamma) + \phi(3^{\gamma-1}) + \ldots + \phi(3) + \phi(1))\sigma_\infty(k) \\ &= (2 \cdot 3^{\gamma-1} + 2 \cdot 3^{\gamma-2} + \ldots + 2 + 1)\sigma_\infty(k) \\ &= (2 \cdot \frac{3^\gamma - 1}{3 - 1} + 1)\sigma_\infty(k) \\ &= 3^\gamma \sigma_\infty(k) \\ &= \frac{1}{2}\sigma_\infty(n) \end{aligned}$$

$\alpha = 2\gamma$: Hier ist $\sigma_\infty(n) = 4 \cdot 3^{\gamma-1}\sigma_\infty(k)$. Die gesuchten Spitzen sind wieder die, die im Nenner mindestens $3^{\gamma+1}$ als Teiler haben, also

$$\begin{aligned} p_3 &= (\phi(3^{\gamma-1}) + \phi(3^{\gamma-2}) + \ldots + \phi(3) + \phi(1))\sigma_\infty(k) \\ &= 3^{\gamma-1}\sigma_\infty(k) \\ &= \frac{1}{4}\sigma_\infty(n) \end{aligned}$$

Wir fassen zusammen:

Satz 35 *Es sei $n = 3^\alpha k$, $(3, k) = 1$, $\alpha \geq 2$. Dann liegt S_3 im Normalisator $\mathcal{N}_n$ von $\Gamma_0(n)$. Die Verzweigungspunkte der Gruppenerweiterung*

$$G_3 =< \Gamma_0(n), S_3 >$$

sind gegeben durch:

elliptischer Fall: Alle Punkte $\frac{\tau_\rho}{3}$, wo τ_ρ ein elliptischer Fixpunkt von $\Gamma_0(\frac{n}{3})$ ist. Deren Anzahl e_3 ist

$$e_3 = \epsilon_\rho(\frac{n}{3}),$$

parabolischer Fall: Alle Spitzen $s = \frac{a}{b}$, $3^\beta || b$ von $\Gamma_0(n)$ mit $2\beta \geq \alpha + 1$. Deren Anzahl p_3 ist

$$p_3 = \begin{cases} \frac{1}{2}\sigma_\infty(n) & \alpha \text{ ungerade} \\ \frac{1}{4}\sigma_\infty(n) & \alpha \text{ gerade} \end{cases}$$

Alle auftretenden Fixpunkte haben Verzweigungsordnung 3, sodaß sich für das Geschlecht g_3 von G_3 ergibt:

$$g_3 = \frac{1}{3}(g + 2 - p_3 - e_3) = \begin{cases} \frac{1}{3}(g + 2 - \frac{1}{2}\sigma_\infty(n) - \epsilon_\rho(\frac{n}{3})) & \alpha \text{ ungerade} \\ \frac{1}{3}(g + 2 - \frac{1}{4}\sigma_\infty(n) - \epsilon_\rho(\frac{n}{3})) & \alpha \text{ gerade} \end{cases}$$

Hier nun eine Tabelle mit den Fällen $n < 100$. Die Fälle mit Geschlecht $g_3 = 0$ sind vermutlich alle darunter.

n	g	$\sigma_\infty(n)$	ellipt. Fixp.	e_3	parab. Fixp.	p_3	g_3
9	0	4	$\frac{-3+\sqrt{3}i}{18}$	1	$i\infty$	1	0
18	0	8	–	0	$i\infty, \frac{1}{3}$	2	0
27	1	6	–	0	$i\infty, \pm\frac{1}{9}$	3	0
36	1	12	–	0	$i\infty, \frac{1}{9}, \frac{1}{18}$	3	0
45	3	8	–	0	$i\infty, \frac{1}{9}$	2	1
54	4	12	–	0	$i\infty, \pm\frac{1}{9}, \pm\frac{1}{18}, \frac{1}{27}$	6	0
63	5	8	$\frac{\pm 9+\sqrt{3}i}{126}$	2	$i\infty, \frac{1}{9}$	2	1
72	5	16	–	0	$i\infty, \frac{1}{9}, \frac{1}{18}, \frac{1}{27}$	4	1
81	4	12	–	0	$i\infty, \pm\frac{1}{27}$	3	1
90	11	16	–	0	$i\infty, \frac{1}{9}, \frac{1}{18}, \frac{1}{45}$	4	3
99	9	8	–	0	$i\infty, \frac{1}{9}$	2	3

Wir erhalten

$$\begin{aligned} g_3 = 0 \iff n \in & \{9, 18\} \qquad\qquad (g = 0) \\ & \cup\{27, 36, 54\}\ . \end{aligned}$$

Um in diesen Fällen die erzeugenden Funktionen C_n zu bekommen, verwenden wir Satz 34.

Beispiel: $n = 36$

$$\begin{array}{lcccccccccc} \Gamma_0(36) \text{ hat 12 Spitzen} & : i\infty & , \ 0 & , \frac{1}{2} & , \pm\frac{1}{3} & , \frac{1}{4} & , \pm\frac{1}{6} & , \frac{1}{9} & , \pm\frac{1}{12} & , \frac{1}{18} \\ \text{mit den Weiten } \kappa_{36} & : \ 1 & , 36 & , 9 & , \ 4 & , 9 & , \ 1 & , 4 & , \ 1 & , 1 \end{array}$$

Fixpunkte für $G_3 =< \Gamma_0(36, S_3 >$: $\quad i\infty, \frac{1}{9}, \frac{1}{18}$.

Für die anderen Spitzen gilt:

$$\begin{array}{ccccc} -\frac{1}{3} & \overset{G_3}{\sim} & 0 & \overset{G_3}{\sim} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \overset{G_3}{\sim} & \frac{1}{6} & \overset{G_3}{\sim} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \overset{G_3}{\sim} & \frac{1}{12} & \overset{G_3}{\sim} & -\frac{1}{12} \end{array}$$

Eine erzeugende Funktion C_{36}für $< \Gamma_0(36), S_3 >$ hat als Modulfunktion für $\Gamma_0(36)$ die Ordnung 3. Wir legen den Pol bei $i\infty$ und die Nullstelle bei 0 fest. Aus jedem Zyklus äquivalenter Spitzen nehmen wir eine heraus und erhalten nachfolgende Gleichungen. Wir benutzen die Bedingung $\sum r_\delta = 0$ um r_{36} zu eliminieren, weiterhin ist $r_2 = r_4 = 0$.

$$\begin{aligned} v(0) &= \frac{1}{24}(-24r_3 - 30r_6 - 32r_9 - 33r_{12} - 34r_{18} - 35r_{36}) \\ &= \frac{1}{24}(11r_3 + 5r_6 + 3r_9 + 2r_{12} + r_{18}) \\ v(\frac{1}{2}) &= \frac{1}{24}\sum_{\delta|36}\frac{9}{\delta}((\delta,2)^2 - \delta)r_\delta \\ &= \frac{1}{24}(-6r_3 - 3r_6 - 8r_9 - 6r_{12} - 7r_{18} - 8r_{36}) \\ &= \frac{1}{24}(2r_3 + 5r_6 + 0r_9 + 2r_{12} + r_{18}) \\ v(\frac{1}{4}) &= \frac{1}{24}\sum_{\delta|36}\frac{9}{\delta}((\delta,4)^2 - \delta)r_\delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{24}(-6r_3 - 3r_6 - 8r_9 + 3r_{12} - 7r_{18} - 5r_{36}) \\
&= \frac{1}{24}(-r_3 + 2r_6 - 3r_9 + 8r_{12} - 2r_{18}) \\
v(\frac{1}{9}) &= \frac{1}{24}\sum_{\delta|36}\frac{4}{\delta}((\delta,9)^2 - \delta)r_\delta \\
&= \frac{1}{24}(8r_3 + 2r_6 + 32r_9 - r_{12} + 14r_{18} + 5r_{36}) \\
&= \frac{1}{24}(3r_3 - 3r_6 + 27r_9 - 6r_{12} + 9r_{18}) \\
v(\frac{1}{18}) &= \frac{1}{24}\sum_{\delta|36}\frac{1}{\delta}((\delta,18)^2 - \delta)r_\delta \\
&= \frac{1}{24}(2r_3 + 5r_6 + 8r_9 + 2r_{12} + 17r_{18} + 8r_{36}) \\
&= \frac{1}{24}(6r_3 - 3r_6 + 0r_9 - 6r_{12} + 9r_{18})
\end{aligned}$$

Wir lösen das LGS

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r}
11 & 5 & 3 & 2 & 1 & 24 \\
2 & 5 & 0 & 2 & 1 & 0 \\
-1 & 2 & -3 & 8 & -2 & 0 \\
3 & -3 & 27 & -6 & 9 & 0 \\
-6 & -3 & 0 & -6 & 9 & 0
\end{array}\right)$$

$$\longleftrightarrow \qquad \left(\begin{array}{ccccc|r}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2
\end{array}\right)$$

und erhalten

$$r_3 = 3,\ r_6 = -2,\ r_9 = -1,\ r_{12} = 1,\ r_{18} = 2,\ r_{36} = -r_3 - r_6 - r_9 - r_{12} - r_{18} = -3,$$

also als Erzeugende für $< \Gamma_0(36), S_3 >$

$$C_{36} = \frac{\eta(3\tau)^3\eta(12\tau)\eta(18\tau)^2}{\eta(6\tau)^2\eta(9\tau)\eta(36\tau)^3} \ .$$

Die Tabelle liefert uns die restlichen Fälle, in denen nicht schon $g = 0$ ist, da wir dann C_n als Polynom dritten Grades aus den für $\Gamma_0(n)$ Erzeugenden A_n gewinnen können. In allen Fällen liegt der Pol bei $i\infty$, die Nullstelle bei 0.

n	C_n
27	$\frac{\eta(3\tau)^3}{\eta(27\tau)^3}$
36	$\frac{\eta(3\tau)^3\eta(12\tau)\eta(18\tau)^2}{\eta(6\tau)^2\eta(9\tau)\eta(36\tau)^3}$
54	$\frac{\eta(3\tau)^2\eta(18\tau)\eta(27\tau)}{\eta(6\tau)\eta(9\tau)\eta(54\tau)^2}$

4.4 Die Translation S_2

Die Transformation $S_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ liegt im Normalisator von $\Gamma_0(n)$ genau dann, wenn $4|n$. In diesem Fall ist

$$G_2 =< \Gamma_0(n), S_2 >$$

eine zyklische Erweiterung der Ordnung 2. Die gesamte Restklasse $\Gamma_0(n) \cdot S_2$ ist gegeben durch die Transformationen

$$A = \begin{pmatrix} 2a & a+2b \\ 2nc & 2d \end{pmatrix} \text{ mit } \det(A) = 4ad - 2nc(a+3b) = 4 \ .$$

Die letzte Gleichung liefert uns

$$ad - \frac{n}{2}c(a+2b) = 1 \Longrightarrow ad \equiv 1 \bmod 2 \Longrightarrow a \equiv d \equiv 1 \bmod 2 \ . \qquad (*)$$

Sei eine beliebige Transformation $A = \begin{pmatrix} 2a & a+2b \\ 2nc & 2d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n) \cdot S_2$ gegeben. Dann ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + ad - 1 & \frac{1}{2}(a+2b)(a+d) \\ nc(a+d) & d^2 + ad - 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n)$$

und

$$\mathrm{Spur}(A^2) = (a+d)^2 - 2 \ .$$

1.Fall: A hat einen der elliptischen Punkte von $\Gamma_0(n)$ als Fixpunkt, also ist dieser auch Fixpunkt von A^3 und damit ist $\mathrm{Spur}(A^2) = 0$ oder $= \pm 1$. Aus $\mathrm{Spur}(A^2) = \pm 1$ folgt $|a+d| = 1$, was $(*)$ widerspricht, $\mathrm{Spur}(A^2) = 0$ ist offensichtlich unmöglich.

2.Fall: A hat einen elliptischen Fixpunkt, der kein Fixpunkt von $\Gamma_0(n)$ ist. In diesem Fall ist $A^2 = I$ also $a + d = 0$ ($a + 2b = 0$ liefert $a \equiv 0 \bmod 2$, was $(*)$ widerspricht). Wir berechnen leicht

$$A = \begin{pmatrix} 2a & a+2b \\ 2nc & 2d \end{pmatrix} \text{ hat Fixpunkt } \tau \Longrightarrow A' = \begin{pmatrix} a & a+2b \\ \frac{n}{2}c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(\frac{n}{2}) \text{ hat Fixpunkt } 2\tau$$

und wegen $\mathrm{Spur}(A') = 0$ ist 2τ ein elliptischer Fixpunkt τ_i von A'.
Sei umgekehrt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{n}{2}c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(\frac{n}{2})$ eine Transformation mit $a + d = 0$, $ad - \frac{n}{2}bc = 1$ und dem elliptischen Fixpunkt τ_i. Angenommen es wäre $b \equiv 0 \bmod 2$, $b = 2b'$. Dann wäre $A' = \begin{pmatrix} a & b' \\ nc & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n)$, $a + d = 0$. Also hätte A' einen elliptischen Fixpunkt, was für $4|n$ unmöglich ist (siehe II.1.1). Damit ist $B = \begin{pmatrix} 2a & b \\ 2nc & 2d \end{pmatrix} \in G_2$ und B hat den Fixpunkt $\frac{\tau_i}{2}$. Wir können also folgern:

Die Anzahl e_2 der elliptischen Verzweigungspunkte in der Erweiterung G_2 ist $\epsilon_i(\frac{n}{2})$.

3.Fall: A hat einen parabolischen Punkt als Fixpunkt. Daraus folgt $|a+d| = 2$ also o.B.d.A. $a + d = 2$. Ist $c = 0$ erhalten wir als Fixpunkt $i\infty$ mit zugehöriger Fixgruppe $< S_2 >$; ist $c \neq 0$ erfüllt der Fixpunkt die Gleichung

$$\begin{aligned} & 2nc\tau^2 + (2d - 2a)\tau_(a + 2b) \\ \Longleftrightarrow \quad & 2nc\tau^2 + 4(1-a)\tau - (a+2b) \\ \Longrightarrow \quad & \tau = \frac{a-1}{nc} \ . \end{aligned}$$

Die Frage ist wieder, welche Spitzen von $\Gamma_0(n)$ sich auf diese Weise darstellen lassen. Die Berechnung und die Antwort ist völlig analog zum vorigen Abschnitt, wo S_3 untersucht wurde. Es gilt mit $n = 2^\alpha k$, $(2, k) = 1$:

Es sind genau die Spitzen $s = \frac{a}{b}$ von $\Gamma_0(n)$ Verzweigungspunkte, für die gilt: $2^\beta || b$ und $2\beta \geq \alpha + 1$.

Deren Anzahl p_2 berechnen wir mit Hilfe der Ergebnisse aus III.1.2:

$n = 2^\alpha k, (2, k) = 1$:

$\alpha = 2\gamma + 1$: Hier ist $\sigma_\infty(n) = 2^{\gamma+1}\sigma_\infty(k)$. Die gesuchten Spitzen sind die, die im Nenner mindestens $2^{\gamma+1}$ als Teiler haben, also

$$\begin{aligned} p_2 &= (\phi(2^\gamma) + \phi(2^{\gamma-1}) + \ldots + \phi(2) + \phi(1))\sigma_\infty(k) \\ &= (2^{\gamma-1} + 2^{\gamma-2} + \ldots + 1 + 1)\sigma_\infty(k) \\ &= 2^\gamma \sigma_\infty(k) \\ &= \frac{1}{2}\sigma_\infty(n) \end{aligned}$$

$\alpha = 2\gamma$: Hier ist $\sigma_\infty(n) = 3 \cdot 2^{\gamma-1}\sigma_\infty(k)$. Die gesuchten Spitzen sind wieder die, die im Nenner mindestens $2^{\gamma+1}$ als Teiler haben, also

$$\begin{aligned} p_2 &= (\phi(2^{\gamma-1}) + \phi(2^{\gamma-2}) + \ldots + \phi(2) + \phi(1))\sigma_\infty(k) \\ &= 2^{\gamma-1}\sigma_\infty(k) \\ &= \frac{1}{3}\sigma_\infty(n) \end{aligned}$$

Wir fassen zusammen:

Satz 36 *Es sei $n = 2^\alpha k$, $(2, k) = 1$, $\alpha \geq 2$. Dann liegt S_2 im Normalisator $\mathcal{N}_n$ von $\Gamma_0(n)$. Die Verzweigungspunkte der Gruppenerweiterung*

$$G_2 =< \Gamma_0(n), S_2 >$$

sind gegeben durch:

elliptischer Fall: Alle Punkte $\frac{\tau_i}{2}$, wo τ_i ein elliptischer Fixpunkt von $\Gamma_0(\frac{n}{2})$ ist. Deren Anzahl e_2 ist

$$e_2 = \epsilon_i(\frac{n}{2}),$$

parabolischer Fall: Alle Spitzen $s = \frac{a}{b}$ von $\Gamma_0(n)$ mit $2^\beta || b$ und $2\beta \geq \alpha + 1$. Deren Anzahl p_2 ist

$$p_2 = \begin{cases} \frac{1}{2}\sigma_\infty(n) & \alpha \text{ ungerade} \\ \frac{1}{3}\sigma_\infty(n) & \alpha \text{ gerade} \end{cases}$$

Alle auftretenden Fixpunkte haben Verzweigungsordnung 2, sodaß sich für das Geschlecht g_2 von G_2 ergibt:

$$g_2 = \frac{1}{2}(g + 2 - \frac{1}{2}p_2 - \frac{1}{2}e_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}(g + 2 - \frac{1}{2}\sigma_\infty(n) - \epsilon_i(\frac{n}{2})) & \alpha \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}(g + 2 - \frac{1}{3}\sigma_\infty(n) - \epsilon_i(\frac{n}{2})) & \alpha \text{ gerade} \end{cases}$$

Es folgt eine Tabelle mit den Fällen $n \leq 80$. Die Fälle mit Geschlecht $g_2 = 0$ sind vermutlich alle darunter.

n	g	σ_∞	ellipt. Fixp.	e_2	parab. Fixp.	p_2	g_2
4	0	3	$\frac{-1+i}{4}$	1	$i\infty$	1	0
8	0	4	-	0	$i\infty, \frac{1}{4}$	2	0
12	0	6	-	0	$i\infty, \frac{1}{4}$	2	0
16	0	6	-	0	$i\infty, \frac{1}{8}$	2	0
20	1	6	$\frac{\pm 3+i}{20}$	2	$i\infty, \frac{1}{4}$	2	0
24	3	8	-	0	$i\infty, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}$	4	1
28	2	6	-	0	$i\infty, \frac{1}{4}$	2	1
32	1	8	-	0	$i\infty, \pm\frac{1}{8}, \frac{1}{16}$	4	0
36	1	12	-	0	$i\infty, \frac{1}{4}, \pm\frac{1}{12}$	4	0
40	3	8	-	0	$i\infty, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{20}$	4	1
44	4	6	-	0	$i\infty, \frac{1}{4}$	2	2
48	3	12	-	0	$i\infty, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{24}$	4	1
52	5	6	$\frac{\pm 5+i}{52}$	2	$i\infty, \frac{1}{4}$	2	2
56	5	8	-	0	$i\infty, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{28}$	4	2
60	7	12	-	0	$i\infty, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}$	4	3
64	3	12	-	0	$i\infty, \pm\frac{1}{16}, \frac{1}{32}$	4	1
68	7	6	$\frac{\pm 21+i}{68}$	2	$i\infty, \frac{1}{4}$	2	3
72	5	16	-	0	$i\infty, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \pm\frac{1}{12}, \pm\frac{1}{24}, \frac{1}{36}$	8	1
76	8	6	-	0	$i\infty, \frac{1}{4}$	2	4
80	7	12	-	0	$i\infty, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{40}$	4	3

Wir erhalten

$$\begin{aligned} g_3 = 0 \Longleftrightarrow n \in & \{4, 8, 12, 16\} \qquad (g = 0) \\ \cup & \{20, 32, 36\} \end{aligned}$$

Um in diesen Fällen die erzeugenden Funktionen D_n zu bekommen, verwenden wir Satz 34.

Beispiel: $n = 20$

$\Gamma_0(20)$ hat 6 Spitzen	:	$i\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
mit den Weiten κ_{20}	:	1	20	5	5	4	1

Parabolische Fixpunkte für $G_2 =< \Gamma_0(20), S_2 >$: $\quad i\infty, \frac{1}{4}$.

Für die anderen Spitzen gilt:

$$0 \overset{G_2}{\sim} \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{5} \overset{G_2}{\sim} \frac{1}{10}$$

Eine erzeugende Funktion D_{20} für G_2 hat als Modulfunktion für $\Gamma_0(20)$ die Ordnung 2. Wir legen den Pol bei $i\infty$ und die Nullstelle bei 0 fest. Aus jedem Zyklus äquivalenter Spitzen nehmen wir eine heraus und erhalten nachfolgende Gleichungen. Wir benutzen die Bedingung $\sum r_\delta = 0$ um r_{20} zu eliminieren, weiterhin ist $r_5 = 0$.

$$v(0) \quad = \quad \frac{1}{24}(-10r_2 - 15r_4 - 18r_{10} - 19r_{20})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{24}(9r_2+4r_4+r_{10})\\
v(\frac{1}{4}) &= \frac{1}{24}\sum_{\delta|20}\frac{5}{\delta}((\delta,4)^2-\delta)r_\delta\\
&= \frac{1}{24}(5r_2+15r_4-3r_{10}-r_{20})\\
&= \frac{1}{24}(6r_2+16r_4-2r_{10})\\
v(\frac{1}{5}) &= \frac{1}{24}\sum_{\delta|20}\frac{4}{\delta}((\delta,5)^2-\delta)r_\delta\\
&= \frac{1}{24}(-2r_2-3r_4+6r_{10}+r_{20})\\
&= \frac{1}{24}(-3r_2-4r_4+5r_{10})
\end{aligned}$$

Wir lösen das LGS

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 9 & 4 & 1 & 24\\ 3 & 8 & -1 & 0\\ -3 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

und erhalten

$$r_2=3,\ r_4=-1,\ r_{10}=1,\ r_{20}=-r_2-r_4-r_{10}=-3,$$

also als Erzeugende für $<\Gamma_0(20),S_2>$

$$D_{20}=\frac{\eta(2\tau)^3\eta(10\tau)}{\eta(4\tau)\eta(20\tau)^3}\ .$$

Die Tabelle liefert uns die restlichen Fälle, in denen nicht schon $g=0$ ist, da wir dann D_n als Polynom zweiten Grades aus den für $\Gamma_0(n)$ Erzeugenden A_n gewinnen können. In allen Fällen liegt der Pol bei $i\infty$, die Nullstelle bei 0.

n	D_n
20	$\frac{\eta(2\tau)^3\eta(10\tau)}{\eta(4\tau)\eta(20\tau)^3}$
32	$\frac{\eta(2\tau)^2\eta(16\tau)}{\eta(4\tau)\eta(32\tau)^2}$
36	$\frac{\eta(2\tau)^2\eta(12\tau)\eta(18\tau)}{\eta(4\tau)\eta(6\tau)\eta(36\tau)^2}$

4.5 Die Translation S_4

Die Transformation $S_4=\binom{4\ 1}{0\ 4}$ liegt im Normalisator von $\Gamma_0(n)$ genau dann, wenn $16|n$. In diesem Fall ist

$$G_4=<\Gamma_0(n),S_4>$$

eine zyklische Erweiterung der Ordnung 4. Die gesamte Restklasse $\Gamma_0(n) \cdot S_4$ ist gegeben durch die Transformationen

$$A = \begin{pmatrix} 4a & a+4b \\ 4nc & 4d \end{pmatrix} \text{ mit } \det(A) = 16ad - 4nc(a+3b) = 16 \ .$$

Die letzte Gleichung liefert uns

$$ad - \frac{n}{4}c(a+4b) = 1 \Longrightarrow ad \equiv 1 \bmod 4 \Longrightarrow a \equiv d \bmod 4 \ . \qquad (*)$$

Sei $A = \begin{pmatrix} 4a & a+4b \\ 4nc & 4d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n) \cdot S_4$ gegeben. Dann ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2(a^2+ad-1) & \frac{1}{2}(a+4b)(a+d) \\ 2nc(a+d) & 2(d^2+ad-1) \end{pmatrix} \qquad \det(A^2) = 4$$

eine Transformation aus G_2. Wäre $A^2 = I$ so wäre $a + 4b = 0$ oder $a + d = 0$ was beides $(*)$ widerspricht. Das bedeutet, daß bei der Erweiterung von G_2 zu G_4 keine neuen Fixpunkte entstehen. Außerdem ist $\epsilon_i(\frac{n}{2}) = 0$ für $16|n$ sodaß auch keine elliptischen Verzweigungspunkte auftreten. Wir haben also nur zu untersuchen, welche der p_2 Spitzen, die bereits in G_2 verzweigt waren, in G_4 die volle Verzweigungsordnung 4 erreichen.

Wenn A einen parabolischen Fixpunkt hat, ist $|a + d| = 2$ also o.B.d.A. $a + d = 2$. Ist $c = 0$, erhalten wir als Fixpunkt $i\infty$ mit zugehöriger Fixgruppe $< S_4 >$; ist $c \neq 0$ erfüllt der Fixpunkt τ die Gleichungen

$$\begin{aligned} & 4nc\tau^2 + (4d-4a)\tau_{(}a+4b) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & 4nc\tau^2 + 8(1-a)\tau - (a+4b) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & \tau = \frac{a-1}{nc} \ . \end{aligned}$$

Wir überprüfen, wie in den letzten Abschnitten, welche Spitzen von $\Gamma_0(n)$ so darstellbar sind.

Es ist $n = 2^\alpha k$, $(2,k) = 1$, $\alpha \geq 4$ und $s = \frac{t}{2^\beta k}$, $(2,t) = 1$, $0 \leq \beta \leq \alpha$ eine beliebige Spitze von $\Gamma_0(n)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{a-1}{nc} &= \frac{t}{2^\beta k} \\ \Longleftrightarrow \quad 2^\beta k(a-1) &= tnc \\ \Longleftrightarrow \quad a &= 2^{\alpha-\beta}tc + 1 \ . \end{aligned}$$

Einsetzen in die Gleichung für die Determinante

$$ad - \frac{n}{4}c(a+4b) = 1$$

und Berücksichtigung von $d = 2 - a$ liefert

$$\begin{aligned} & (2^{\alpha-\beta}+1)(-2^{\alpha-\beta}+1) - 2^{\alpha_2}kc(2^{\alpha-\beta}tc+1+4b) = 1 \\ \Longleftrightarrow \quad & 1 - 2^{2\alpha-2\beta}t^2c^2 - 2^{2\alpha-\beta-2}ktc^2 - 2^{\alpha-2}kc - 2^\alpha kbc = 1 \\ \Longleftrightarrow \quad & tc(2^{2\alpha-2\beta}t + 2^{2\alpha-\beta-2}k) + 2^\alpha kb = 2^{\alpha-2}k \ . \end{aligned}$$

Wenn $\beta = 0, 1$ ist, folgt $2|k$ W!!. Für $\beta \geq 2$ ist $2\alpha - 2\beta \leq 2\alpha - \beta - 2$ und es ergibt sich als notwendige Bedingung für die Lösbarkeit

$$\begin{aligned} 2^{2\alpha-2\beta}|2^{\alpha-2} \quad & \Longleftrightarrow \quad 2\alpha - 2\beta \leq \alpha - 1 \\ & \Longleftrightarrow \quad 2\beta \geq \alpha + 2 \ . \end{aligned}$$

Wir dividieren durch $2^{2\alpha-2\beta}$ und erhalten

$$tc(t - 2^{\beta-2}k) - 2^{2\beta-\alpha}kb = 2^{2\beta-\alpha-2}k \ .$$

Diese Gleichung ist wegen

$$d|t(t-2^{\beta-2}k) \text{ und } d|2^{2\beta-\alpha}k \Longrightarrow d|k$$

immer in b, c lösbar. Es ergibt sich:

Es haben genau die Spitzen $s=\frac{a}{b}$, $2^\beta||b$ von $\Gamma_0(n)$ die Verzweigungsordnung 4, für die gilt: $2\beta \geq \alpha+2$; die Verzweigungsordnung 2 liegt genau dann vor, wenn $2\beta = \alpha+1$.

Letzteres ergibt sich aus der Tatsache, daß die Punkte mit $2\beta \geq \alpha+1$ genau die verzeigten Spitzen von G_2 waren.
Für die Anzahlen $p_{4,l}$ der parabolischen Fixpunkte der Verzweigungsordnung l bemühen wir wieder die Formeln aus II.1.2:

$n = 2^\alpha k,\ (2,k) = 1:$

$\alpha = 2\gamma+1$: Es ist $\sigma_\infty(n) = 2^{\gamma+1}\sigma_\infty(k)$ und es sind $p_2 = \frac{1}{2}\sigma_\infty(n)$ der Spitzen in G_2 verzweigt. Die Spitzen mit Verzweigungsordnung 4 sind genau die, die im Nenner mindestens $2^{\gamma+2}$ als Teiler haben, also

$$\begin{aligned} p_{4,4} &= (\phi(2^{\gamma-1})+\phi(2^{\gamma-2})+\ldots+\phi(2)+1)\sigma_\infty(k) \\ &= 2^{\gamma-1}\sigma_\infty(k) \\ &= \frac{1}{4}\sigma_\infty(n) \end{aligned}$$

woraus folgt

$$p_{4,2} = p_2 - p_{4,4} = \frac{1}{4}\sigma_\infty(n)\ .$$

$\alpha = 2\gamma$: Es gilt

$$2\beta \geq \alpha+1 \Longrightarrow 2\beta \geq \alpha+2$$

und daher hat jede Spitze, welche in G_2 verzweigt ist, in G_4 die volle Verzweigungsordnung 4

$$p_{4,4} = p_2 = \frac{1}{3}\sigma_\infty(n)\ .$$

Wir fassen zusammen:

Satz 37 *Es sei $n = 2^\alpha k$, $(2,k)=1$, $\alpha \geq 4$. Dann liegt S_4 im Normalisator $\mathcal{N}_n$ von $\Gamma_0(n)$. Die Gruppenerweiterung*

$$G_4 = <\Gamma_0(n), S_4>$$

hat nur parabolische Verzweigungspunkte:

Eine Spitze $s=\frac{a}{b}$, $2^\beta||b$ von $\Gamma_0(n)$ hat Verzweigungsordnung 2, wenn $2\beta=\alpha+1$. Deren Anzahl $p_{4,2}$ ist

$$p_{4,2} = \begin{cases} \frac{1}{4}\sigma_\infty(n) & \alpha \text{ ungerade} \\ 0 & \alpha \text{ gerade} \end{cases}$$

s hat Verzeigungsordnung 4, wenn $2\beta \geq \alpha+2$. Deren Anzahl $p_{4,4}$ ist

$$p_{4,4} = \begin{cases} \frac{1}{4}\sigma_\infty(n) & \alpha \text{ ungerade} \\ \frac{1}{3}\sigma_\infty(n) & \alpha \text{ gerade} \end{cases}$$

Das Geschlecht g_4 von G_4 ist gegeben durch

$$g_4 = \frac{1}{4}(g+3-\frac{1}{2}p_{4,2}-\frac{3}{2}p_{4,4}) = \frac{1}{4}(g+3-\frac{1}{2}\sigma_\infty(n))\ .$$

Es folgt eine Tabelle mit dem Geschlecht g_4 für $n < 200$, was genügt um die Fälle mit $g_4 = 0$ zu bekommen.

n	g	σ_∞	$p_{4,2}$	$p_{4,4}$	g_4	n	g	σ_∞	$p_{4,2}$	$p_{4,4}$	g_4
16	0	6	0	2	0	112	11	12	0	4	2
32	1	8	2	2	0	128	9	16	4	4	1
48	3	12	0	4	0	144	13	24	0	8	1
64	3	12	0	4	0	160	17	16	4	4	3
80	7	12	0	4	1	176	19	12	0	4	4
96	9	16	4	4	1	192	21	24	0	8	3

Wir erhalten

$$\begin{aligned} g_4 = 0 \Longleftrightarrow n \in & \{16\} && (g = 0) \\ \cup & \{32\} && (g_2 = 0) \\ \cup & \{48, 64\}\ . \end{aligned}$$

Um in diesen Fällen die erzeugenden Funktionen D_n zu bekommen, verwenden wir wieder Satz 34.

Beispiel: $n = 48$

$$\begin{array}{lcccccccccccc} \Gamma_0(48) \text{ hat } 12 \text{ Spitzen} : & i\infty\ , & 0\ , & \frac{1}{2}\ , & \frac{1}{3}\ , & \pm\frac{1}{4}\ , & \frac{1}{6}\ , & \frac{1}{8}\ , & \pm\frac{1}{12}\ , & \frac{1}{16}\ , & \frac{1}{24}\ , \\ \text{mit den Weiten } \kappa_{48} \quad : & 1\ , & 48\ , & 12\ , & 16\ , & 3\ , & 4\ , & 3\ , & 1\ , & 3\ , & 1\ , \end{array}$$

Alle Verzweigungspunkte von $G_4 =< \Gamma_0(48), S_4 >$ haben Verzweigungsordnung 4. Diese sind: $i\infty, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{24}$
.

Für die anderen Spitzen gilt:

$$\begin{gathered} -\tfrac{1}{4} \overset{G_4}{\sim} 0 \overset{G_4}{\sim} \tfrac{1}{4} \overset{G_4}{\sim} \tfrac{1}{2} \\ -\tfrac{1}{12} \overset{G_4}{\sim} \tfrac{1}{12} \overset{G_4}{\sim} \tfrac{1}{6} \overset{G_4}{\sim} \tfrac{1}{3} \end{gathered}$$

Eine erzeugende Funktion E_{48} für G_4 hat als Modulfunktion für $\Gamma_0(48)$ die Ordnung 4. Wir legen den Pol bei $i\infty$ und die Nullstelle bei 0 fest. Aus jedem Zyklus äquivalenter Spitzen nehmen wir eine heraus und erhalten nachfolgende Gleichungen. Wir benutzen die Bedingung $\sum r_\delta = 0$ um r_{48} zu eliminieren, weiterhin ist $r_2 = r_3 = r_6 = 0$.

$$\begin{aligned} v(0) &= \frac{1}{24}(-36r_4 - 42r_8 - 44r_{12} - 45r_{16} - 46r_{24} - 47r_{48}) \\ &= \frac{1}{24}(11r_4 + 5r_8 + 3r_{12} + 2r_{16} + r_{24}) \\ v(\frac{1}{12}) &= \frac{1}{24}\sum_{\delta|48} \frac{1}{\delta}((\delta,12)^2 - \delta)r_\delta \\ &= \frac{1}{24}(3r_4 + r_8 + 11r_{12} + 0r_{16} + 5r_{24} + 2r_{48}) \\ &= \frac{1}{24}(r_4 - r_8 + 9r_{12} - 2r_{16} + 3r_{24}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(\frac{1}{8}) &= \frac{1}{24}\sum_{\delta|48} \frac{3}{\delta}((\delta,8)^2 - \delta)r_\delta \\ &= \frac{1}{24}(9r_4 + 21r_8 + r_{12} + 9r_{16} + 5r_{24} + r_{48}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{24}(8r_4 + 20r_8 + 0r_{12} + 8r_{16} + 4r_{24}) \\
v(\frac{1}{16}) &= \frac{1}{24}\sum_{\delta|48}\frac{3}{\delta}((\delta,16)^2-\delta)r_\delta \\
&= \frac{1}{24}(9r_4 + 21r_8 + r_{12} + 45r_{16} + 5r_{24} + 13r_{48}) \\
&= \frac{1}{24}(-4r_4 + 8r_8 - 12r_{12} + 32r_{16} - 8r_{24}) \\
v(\frac{1}{24}) &= \frac{1}{24}\sum_{\delta|48}\frac{1}{\delta}((\delta,24)^2-\delta)r_\delta \\
&= \frac{1}{24}(3r_4 + 7r_8 + 11r_{12} + 3r_{16} + 23r_{24} + 11r_{48}) \\
&= \frac{1}{24}(-8r_4 - 4r_8 + 0r_{12} - 8r_{16} + 12r_{24})
\end{aligned}$$

Wir lösen das LGS

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r}
11 & 5 & 3 & 2 & 1 & 24 \\
1 & -1 & 9 & -2 & 3 & 0 \\
8 & 20 & 0 & 8 & 4 & 0 \\
-4 & 8 & -12 & 32 & -8 & 0 \\
-8 & -4 & 0 & -8 & 12 & 0
\end{array}\right)$$

$$\longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccccc|r}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2
\end{array}\right)$$

und erhalten

$$r_4 = 3,\ r_8 = -2,\ r_{12} = -1,\ r_{16} = 1,\ r_{24} = 2,\ r_{48} = -r_4 - r_8 - r_{12} - r_{16} - r_{24} = -3,$$

also als Erzeugende für $< \Gamma_0(48), S_4 >$

$$E_{48} = \frac{\eta(4\tau)^3\eta(16\tau)\eta(24\tau)^2}{\eta(8\tau)^2\eta(12\tau)\eta(48\tau)^3}\ .$$

Die Tabelle liefert uns noch den anderen Fall, in dem nicht schon $g = 0$ oder $g_2 = 0$ ist, da wir dann E_n als Polynom aus den Erzeugenden A_n bzw. den Erzeugenden D_n gewinnen lassen. In beiden Fällen liegt der Pol bei $i\infty$, die Nullstelle bei 0.

n	E_n
48	$\frac{\eta(4\tau)^3\eta(16\tau)\eta(24\tau)^2}{\eta(8\tau)^2\eta(12\tau)\eta(48\tau)^3}$
64	$\frac{\eta(4\tau)^2\eta(32\tau)}{\eta(8\tau)\eta(64\tau)^2}$

4.6 Die Translation S_8

Die Transformation $S_8 = \left(\begin{smallmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 8 \end{smallmatrix}\right)$ liegt im Normalisator von $\Gamma_0(n)$ genau dann, wenn $64|n$. In diesem Fall ist

$$G_8 =< \Gamma_0(n), S_8 >$$

eine zyklische Erweiterung der Ordnung 8. Die gesamte Restklasse $\Gamma_0(n) \cdot S_8$ ist gegeben durch die Transformationen

$$A = \begin{pmatrix} 8a & a+8b \\ 8nc & 8d \end{pmatrix} \text{ mit } \det(A) = 64ad - 8nc(a+3b) = 64 \ .$$

Die Situation ist hier völlig analog zum letzten Abschnitt. Bei der Erweiterung von G_4 zu G_8 entstehen keine neuen Fixpunkte, sodaß die Punkte mit Verzeigungsordnung 8 alle unter den $p_{4,4}$ Verzweigungspunkten der Ordnung 4 von G_4 zu finden sind.
Die Berechnung dieser Punkte und deren Anzahl ist nahezu identisch zu den entsprechenden Berechnungen im Abschnitt über G_4. Es ergibt sich:

$n = 2^\alpha k, \ (2,k) = 1$:

Sei $s = \frac{a}{b}$ eine Spitze von $\Gamma_0(n)$ mit $2^\beta || b$. Dann hat s die Verzweigungsordnung 8, genau dann wenn $2\beta \geq \alpha + 3$; damit hat s die Verzweigungsordnung 2 bzw. 4, wenn $2\beta = \alpha + 1$ bzw. $2\beta = \alpha + 2$.

Wir berechnen $p_{8,l}$ (Anzahl der Verzweigungspunkte der Ordnung l):

$\alpha = 2\gamma + 1$: Es gilt

$$2\beta \geq \alpha + 2 \Longrightarrow 2\beta \geq \alpha + 3 \ ,$$

daher ist jeder Punkt, der in G_4 4-verzweigt ist, in G_8 8-verzweigt und wir berechnen leicht

$$\begin{aligned} p_{8,8} &= p_{4,4} = \frac{1}{4}\sigma_\infty(n) \\ p_{8,4} &= 0 \\ p_{8,2} &= p_{4,2} = \frac{1}{4}\sigma_\infty(n) \end{aligned}$$

$\alpha = 2\gamma$: Eine Spitze ist 8-verzweigt, wenn sie im Nenner mindestens $2^{\gamma+2}$ als Teiler hat, also

$$\begin{aligned} p_{8,8} &= (\phi(2^{\gamma-2}) + \phi(2^{\gamma-3}) + \ldots + \phi(2) + 1)\sigma_\infty(k) \\ &= 2^{\gamma-2}\sigma_\infty(k) \\ &= \frac{1}{6}\sigma_\infty(n) \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} p_{8,4} &= p_{4,4} - p_{8,8} = \frac{1}{6}\sigma_\infty(n) \\ p_{8,2} &= p_{4,2} = 0 \end{aligned}$$

Wir fassen zusammen:

Satz 38 *Es sei $n = 2^\alpha k, \ (2,k) = 1, \ \alpha \geq 6$. Dann liegt S_8 im Normalisator $\mathcal{N}_n$ von $\Gamma_0(n)$. Die Gruppenerweiterung*

$$G_8 = < \Gamma_0(n), S_8 >$$

hat nur parabolische Verzweigungspunkte:

Eine Spitze $s = \frac{a}{b}$, $2^\beta || b$ von $\Gamma_0(n)$ hat Verzweigungsordnung 2, wenn $2\beta = \alpha + 1$. Deren Anzahl $p_{8,2}$ ist

$$p_{8,2} = \begin{cases} \frac{1}{4}\sigma_\infty(n) & \alpha \text{ ungerade} \\ 0 & \alpha \text{ gerade} \end{cases}$$

s hat Verzeigungsordnung 4, wenn $2\beta = \alpha + 2$. Deren Anzahl $p_{8,4}$ ist

$$p_{8,4} = \begin{cases} 0 & \alpha \text{ ungerade} \\ \frac{1}{6}\sigma_\infty(n) & \alpha \text{ gerade} \end{cases}$$

s hat Verzeigungsordnung 8, wenn $2\beta \geq \alpha + 3$. Deren Anzahl $p_{8,8}$ ist

$$p_{8,8} = \begin{cases} \frac{1}{4}\sigma_\infty(n) & \alpha \text{ ungerade} \\ \frac{1}{6}\sigma_\infty(n) & \alpha \text{ gerade} \end{cases}$$

Das Geschlecht g_8 von G_8 ist gegeben durch

$$g_8 = \frac{1}{8}(g + 7 - \frac{1}{2}p_{8,2} - \frac{3}{2}p_{8,4} - \frac{7}{2}p_{8,8}) = \begin{cases} \frac{1}{8}(g + 7 - \frac{5}{6}\sigma_\infty(n)) & \alpha \text{ ungerade} \\ \frac{1}{8}(g + 7 - \sigma_\infty(n)) & \alpha \text{ gerade .} \end{cases}$$

Es folgt eine Tabelle mit dem Geschlecht g_8 für $n < 400$, was genügt um die Fälle $g_8 = 0$ zu bekommen.

n	g	σ_∞	$p_{8,2}$	$p_{8,4}$	$p_{8,8}$	g_8	n	g	σ_∞	$p_{8,2}$	$p_{8,4}$	$p_{8,8}$	g_8
64	3	12	0	2	2	0	256	21	24	0	4	4	1
128	9	16	4	0	4	0	320	37	24	0	4	4	3
192	21	24	0	4	4	1	384	49	32	8	0	8	3

Wir erhalten

$$\begin{aligned} g_8 = 0 \Longleftrightarrow n \in &\{64\} \qquad (g_4 = 0) \\ \cup &\{128\} \ . \end{aligned}$$

Eine erzeugende Funktion F_{64} für $n = 64$ erhält man als Polynom zweiten Grades aus der (für G_4) Erzeugenden E_{64}. Für $n = 128$ berechnet man

n	F_n
128	$\frac{\eta(8\tau)^2\eta(64\tau)}{\eta(16\tau)\eta(128\tau)^2}$

4.7 Die Translation S_6

Die Transformation $S_6 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ liegt im Normalisator von $\Gamma_0(n)$ genau dann, wenn $36|n$. In diesem Fall ist

$$G_6 =< \Gamma_0(n), S_6 >$$

eine zyklische Erweiterung der Ordnung 6. Die gesamte Restklasse $\Gamma_0(n) \cdot S_6$ ist gegeben durch die Transformationen

$$A = \begin{pmatrix} 6a & a + 6b \\ 6nc & 6d \end{pmatrix} \text{ mit } \det(A) = 36ad - 6nc(a + 3b) = 36 \ .$$

Aus $A^2 \neq I$ folgt, daß bei der Erweiterung von G_3 zu G_6 keine neuen Fixpunkte hinzukommen. Die Verzeigungspunkte sind daher leicht zu finden. Eine Spitze ist 6-verzweigt, genau dann wenn sie in G_3 3-verzweigt und in G_2 2-verzweigt ist. Da hierbei die Exponenten von 2 und 3 eine Rolle spielen, müssen wir 4 Fälle unterscheiden.

$n = 2^\alpha 3^{\alpha'} k,\ (6,k) = 1$:

α, α' ungerade: Es ist $p_2 = \frac{1}{2}\sigma_\infty(n),\ p_3 = \frac{1}{2}\sigma_\infty(n)$, also

$$\begin{aligned} p_{6,6} &= \frac{1}{4}\sigma_\infty(n) \\ p_{6,3} &= p_3 - p_{6,6} = \frac{1}{4}\sigma_\infty(n) \\ p_{6,2} &= p_2 - p_{6,6} = \frac{1}{4}\sigma_\infty(n) \end{aligned}$$

α ungerade,α' gerade: Es ist $p_2 = \frac{1}{2}\sigma_\infty(n),\ p_3 = \frac{1}{4}\sigma_\infty(n)$, also

$$\begin{aligned} p_{6,6} &= \frac{1}{8}\sigma_\infty(n) \\ p_{6,3} &= p_3 - p_{6,6} = \frac{1}{8}\sigma_\infty(n) \\ p_{6,2} &= p_2 - p_{6,6} = \frac{3}{8}\sigma_\infty(n) \end{aligned}$$

α gerade,α' ungerade: Es ist $p_2 = \frac{1}{3}\sigma_\infty(n),\ p_3 = \frac{1}{2}\sigma_\infty(n)$, also

$$\begin{aligned} p_{6,6} &= \frac{1}{6}\sigma_\infty(n) \\ p_{6,3} &= p_3 - p_{6,6} = \frac{1}{3}\sigma_\infty(n) \\ p_{6,2} &= p_2 - p_{6,6} = \frac{1}{6}\sigma_\infty(n) \end{aligned}$$

α, α' gerade: Es ist $p_2 = \frac{1}{3}\sigma_\infty(n),\ p_3 = \frac{1}{4}\sigma_\infty(n)$, also

$$\begin{aligned} p_{6,6} &= \frac{1}{12}\sigma_\infty(n) \\ p_{6,3} &= p_3 - p_{6,6} = \frac{1}{6}\sigma_\infty(n) \\ p_{6,2} &= p_2 - p_{6,6} = \frac{1}{4}\sigma_\infty(n) \end{aligned}$$

Wir fassen zusammen:

Satz 39 *Es sei* $n = 2^\alpha 3^{\alpha'} k,\ (6,k) = 1,\ \alpha \geq 2,\ \alpha' \geq 2$. *Dann liegt* S_6 *im Normalisator* $\mathcal{N}_n$ *von* $\Gamma_0(n)$. *Die Gruppenerweiterung*

$$G_6 =< \Gamma_0(n), S_6 >$$

hat nur parabolische Verzweigungspunkte:

Eine Spitze $s = \frac{a}{b},\ 2^\beta || b,\ 3^{\beta'} || b$ *von* $\Gamma_0(n)$ *hat Verzweigungsordnung 2, wenn* $2\beta \geq \alpha + 1$ *und* $2\beta' < \alpha' + 1$. *Deren Anzahl* $p_{6,2}$ *ist*

$$p_{6,2} = \begin{cases} \frac{1}{4}\sigma_\infty(n) & \alpha, \alpha' \textit{ ungerade} \\ \frac{3}{8}\sigma_\infty(n) & \alpha \textit{ ungerade}, \alpha' \textit{ gerade} \\ \frac{1}{6}\sigma_\infty(n) & \alpha \textit{ gerade}, \alpha' \textit{ ungerade} \\ \frac{1}{4}\sigma_\infty(n) & \alpha, \alpha' \textit{ gerade} \end{cases}$$

s hat Verzweigungsordnung 3*, wenn* $2\beta < \alpha + 1$ *und* $2\beta' \geq \alpha' + 1$*. Deren Anzahl* $p_{6,3}$ *ist*

$$p_{6,3} = \begin{cases} \frac{1}{4}\sigma_\infty(n) & \alpha, \alpha' \textit{ ungerade} \\ \frac{1}{8}\sigma_\infty(n) & \alpha \textit{ ungerade}, \alpha' \textit{ gerade} \\ \frac{1}{3}\sigma_\infty(n) & \alpha \textit{ gerade}, \alpha' \textit{ ungerade} \\ \frac{1}{6}\sigma_\infty(n) & \alpha, \alpha' \textit{ gerade} \end{cases}$$

s hat Verzeigungsordnung 6*, wenn* $2\beta \geq \alpha + 1$ *und* $2\beta' \geq \alpha' + 1$*. Deren Anzahl* $p_{6,6}$ *ist*

$$p_{6,6} = \begin{cases} \frac{1}{4}\sigma_\infty(n) & \alpha, \alpha' \textit{ ungerade} \\ \frac{1}{8}\sigma_\infty(n) & \alpha \textit{ ungerade}, \alpha' \textit{ gerade} \\ \frac{1}{6}\sigma_\infty(n) & \alpha \textit{ gerade}, \alpha' \textit{ ungerade} \\ \frac{1}{12}\sigma_\infty(n) & \alpha, \alpha' \textit{ gerade} \end{cases}$$

Das Geschlecht g_6 *von* G_6 *ist gegeben durch*

$$g_6 = \frac{1}{6}(g + 5 - \frac{1}{2}p_{6,2} - p_{6,3} - \frac{5}{2}p_{6,6}) = \begin{cases} \frac{1}{6}(g + 5 - \sigma_\infty(n)) & \alpha, \alpha' \textit{ ungerade} \\ \frac{1}{6}(g + 5 - \frac{5}{8}\sigma_\infty(n)) & \alpha \textit{ ungerade}, \alpha' \textit{ gerade} \\ \frac{1}{6}(g + 5 - \frac{5}{6}\sigma_\infty(n)) & \alpha \textit{ gerade}, \alpha' \textit{ ungerade} \\ \frac{1}{6}(g + 5 - \frac{1}{2}\sigma_\infty(n)) & \alpha, \alpha' \textit{ gerade} \ . \end{cases}$$

Es folgt eine Tabelle mit dem Geschlecht g_6 für $n < 250$, was genügt um die Fälle $g_8 = 0$ zu bekommen.

n	g	σ_∞	$p_{6,2}$	$p_{6,3}$	$p_{6,6}$	g_8	n	g	σ_∞	$p_{6,2}$	$p_{6,3}$	$p_{6,6}$	g_8
36	1	12	3	2	1	0	144	13	24	6	4	2	1
72	5	16	6	2	2	0	180	25	24	6	4	2	3
108	10	18	3	6	3	0	216	25	24	6	6	6	3

Wir erhalten

$$\begin{aligned} g_6 = 0 \Longleftrightarrow n \in & \{36\} \qquad\qquad (g_2, g_3 = 0) \\ \cup & \{72, 108\} \ . \end{aligned}$$

Eine erzeugende Funktion F_{36} für $n = 36$ erhält man als Polynom zweiten Grades aus der (für G_3) Erzeugenden C_{36}, die Erzeugenden für $n = 72, 108$ sind nachfolgend angegeben.

n	F_n
72	$\frac{\eta(6\tau)^3\eta(24\tau)\eta(36\tau)^2}{\eta(12\tau)^2\eta(18\tau)\eta(72\tau)^3}$
108	$\frac{\eta(6\tau)^2\eta(36\tau)\eta(54\tau)}{\eta(12\tau)\eta(18\tau)\eta(108\tau)^2}$

4.8 Die Translation S_{12}

Die Transformation $S_{12} = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ liegt im Normalisator von $\Gamma_0(n)$ genau dann, wenn $144|n$. In diesem Fall ist

$$G_{12} = < \Gamma_0(n), S_{12} >$$

eine zyklische Erweiterung der Ordnung 12. Die gesamte Restklasse $\Gamma_0(n) \cdot S_{12}$ ist gegeben durch die Transformationen

$$A = \begin{pmatrix} 12a & a+12b \\ 12nc & 12d \end{pmatrix} \text{ mit } \det(A) = 144ad - 12nc(a+3b) = 144 \ .$$

Aus $A^2 \neq I$ folgt, daß bei der Erweiterung von G_6 zu G_{12} keine neuen Fixpunkte hinzukommen. Die Verzweigungspunkte mit ihren Ordnungen lassen sich also, wie bei G_6 durch „Zusammensetzen“von Verzweigunspunkten aus G_3 und G_4 gewinnen: Ein Punkt ist in G_{12} 12-verzweigt genau dann, wenn er in G_3 3-verzweigt und in G_4 4-verzweigt ist; ein Punkt ist in G_{12} 6-verzweigt genau dann, wenn er in G_3 3-verzweigt und in G_4 2-verzweigt ist usw.
Wir müssen wieder 4 Fälle unterscheiden:

$n = 2^\alpha 3^{\alpha'} k, \ (6, k) = 1$:

α, α' ungerade: Es ist $p_{4,2} = p_{4,4} = \frac{1}{4}\sigma_\infty(n), \ p_3 = \frac{1}{2}\sigma_\infty(n)$, also

$$\begin{aligned} p_{12,12} &= \frac{1}{8}\sigma_\infty(n) \\ p_{12,6} &= \frac{1}{8}\sigma_\infty(n) \\ p_{12,4} &= p_{4,4} - p_{12,12} = \frac{1}{8}\sigma_\infty(n) \\ p_{12,3} &= p_3 - p_{12,12} - p_{12,6} = \frac{1}{4}\sigma_\infty(n) \\ p_{12,2} &= p_{4,2} - p_{12,6} = \frac{1}{8}\sigma_\infty(n) \end{aligned}$$

α ungerade,α' gerade: Es ist $p_{4,2} = p_{4,4} = \frac{1}{4}\sigma_\infty(n), \ p_3 = \frac{1}{4}\sigma_\infty(n)$, also

$$\begin{aligned} p_{12,12} &= \frac{1}{16}\sigma_\infty(n) \\ p_{12,6} &= \frac{1}{16}\sigma_\infty(n) \\ p_{12,4} &= p_{4,4} - p_{12,12} = \frac{3}{16}\sigma_\infty(n) \\ p_{12,3} &= p_3 - p_{12,12} - p_{12,6} = \frac{1}{8}\sigma_\infty(n) \\ p_{12,2} &= p_{4,2} - p_{12,6} = \frac{3}{16}\sigma_\infty(n) \end{aligned}$$

α gerade,α' ungerade: Es ist $p_{4,2} = 0, \ p_{4,4} = \frac{1}{3}\sigma_\infty(n), \ p_3 = \frac{1}{2}\sigma_\infty(n)$, also

$$\begin{aligned} p_{12,12} &= \frac{1}{6}\sigma_\infty(n) \\ p_{12,6} &= 0 \\ p_{12,4} &= p_{4,4} - p_{12,12} = \frac{1}{6}\sigma_\infty(n) \\ p_{12,3} &= p_3 - p_{12,12} - p_{12,6} = \frac{1}{3}\sigma_\infty(n) \\ p_{12,2} &= p_{4,2} - p_{12,6} = 0 \end{aligned}$$

α, α' gerade: Es ist $p_{4,2} = 0,\ p_{4,4} = \frac{1}{3}\sigma_\infty(n),\ p_3 = \frac{1}{4}\sigma_\infty(n)$, also

$$\begin{aligned} p_{12,12} &= \frac{1}{12}\sigma_\infty(n) \\ p_{12,6} &= 0 \\ p_{12,4} &= p_{4,4} - p_{12,12} = \frac{1}{4}\sigma_\infty(n) \\ p_{12,3} &= p_3 - p_{12,12} - p_{12,6} = \frac{1}{6}\sigma_\infty(n) \\ p_{12,2} &= p_{4,2} - p_{12,6} = 0 \end{aligned}$$

Wir fassen zusammen:

Satz 40 *Es sei $n = 2^\alpha 3^{\alpha'} k,\ (6,k) = 1,\ \alpha \geq 4,\ \alpha' \geq 2$. Dann liegt S_{12} im Normalisator $\mathcal{N}_n$ von $\Gamma_0(n)$. Die Gruppenerweiterung*

$$G_{12} =< \Gamma_0(n), S_{12} >$$

hat nur parabolische Verzweigungspunkte:

Eine Spitze $s = \frac{a}{b},\ 2^\beta || b,\ 3^{\beta'} || b$ von $\Gamma_0(n)$ hat Verzweigungsordnung 2, wenn $2\beta = \alpha + 1$ und $2\beta' < \alpha' + 1$. Deren Anzahl $p_{12,2}$ ist

$$p_{12,2} = \begin{cases} \frac{1}{8}\sigma_\infty(n) & \alpha, \alpha' \textit{ ungerade} \\ \frac{3}{16}\sigma_\infty(n) & \alpha \textit{ ungerade}, \alpha' \textit{ gerade} \\ 0 & \alpha \textit{ gerade} \end{cases}$$

s hat Verzweigungsordnung 3, wenn $2\beta < \alpha + 1$ und $2\beta' \geq \alpha' + 1$. Deren Anzahl $p_{12,3}$ ist

$$p_{12,3} = \begin{cases} \frac{1}{4}\sigma_\infty(n) & \alpha, \alpha' \textit{ ungerade} \\ \frac{1}{8}\sigma_\infty(n) & \alpha \textit{ ungerade}, \alpha' \textit{ gerade} \\ \frac{1}{3}\sigma_\infty(n) & \alpha \textit{ gerade}, \alpha' \textit{ ungerade} \\ \frac{1}{6}\sigma_\infty(n) & \alpha, \alpha' \textit{ gerade} \end{cases}$$

s hat Verzweigungsordnung 4, wenn $2\beta \geq \alpha + 2$ und $2\beta' < \alpha' + 1$. Deren Anzahl $p_{12,4}$ ist

$$p_{12,4} = \begin{cases} \frac{1}{8}\sigma_\infty(n) & \alpha, \alpha' \textit{ ungerade} \\ \frac{3}{16}\sigma_\infty(n) & \alpha \textit{ ungerade}, \alpha' \textit{ gerade} \\ \frac{1}{6}\sigma_\infty(n) & \alpha \textit{ gerade}, \alpha' \textit{ ungerade} \\ \frac{1}{4}\sigma_\infty(n) & \alpha, \alpha' \textit{ gerade} \end{cases}$$

s hat Verzeigungsordnung 6, wenn $2\beta = \alpha + 1$ und $2\beta' \geq \alpha' + 1$. Deren Anzahl $p_{12,6}$ ist

$$p_{12,6} = \begin{cases} \frac{1}{8}\sigma_\infty(n) & \alpha, \alpha' \textit{ ungerade} \\ \frac{1}{16}\sigma_\infty(n) & \alpha \textit{ ungerade}, \alpha' \textit{ gerade} \\ 0 & \alpha \textit{ gerade} \end{cases}$$

s hat Verzweigungsordnung 12, *wenn* $2\beta \geq \alpha + 2$ *und* $2\beta' \geq \alpha' + 1$. *Deren Anzahl* $p_{12,12}$ *ist*

$$p_{12,12} = \begin{cases} \frac{1}{8}\sigma_\infty(n) & \alpha, \alpha' \textit{ ungerade} \\ \frac{1}{16}\sigma_\infty(n) & \alpha \textit{ ungerade}, \alpha' \textit{ gerade} \\ \frac{1}{6}\sigma_\infty(n) & \alpha \textit{ gerade}, \alpha' \textit{ ungerade} \\ \frac{1}{12}\sigma_\infty(n) & \alpha, \alpha' \textit{ gerade} \end{cases}$$

Das Geschlecht g_{12} *von* G_{12} *ist gegeben durch*

$$g_{12} = \frac{1}{12}(g + 11 - \sum_{l|12} \frac{l-1}{2} p_{12,l}) = \begin{cases} \frac{1}{12}(g + 11 - \frac{3}{2}\sigma_\infty(n)) & \alpha' \textit{ ungerade} \\ \frac{1}{12}(g + 11 - \sigma_\infty(n)) & \alpha' \textit{ gerade} . \end{cases}$$

Es folgt eine Tabelle mit den ersten 4 Fällen; es gibt nur ein n mit $g_{12} = 0$.

n	g	σ_∞	$p_{12,2}$	$p_{12,3}$	$p_{12,4}$	$p_{12,6}$	$p_{12,12}$	g_{12}
144	13	24	0	4	6	0	2	0
288	33	32	6	4	6	2	2	1
432	55	36	0	12	6	0	6	1
576	73	48	0	8	12	0	4	3

Wir erhalten

$$g_{12} = 0 \Longleftrightarrow n = 144 .$$

Als letztes Beispiel berechnen wir eine erzeugende Funktion für G_{12} im Fall $n = 144$.

Beispiel: $n = 144$

$\Gamma_0(144)$ hat 24 Spitzen:

Spitzen :	$i\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{3}$	$\pm\frac{1}{4}$	$\pm\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\pm\frac{1}{12}$	$\pm\frac{5}{12}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{18}$	$\pm\frac{1}{24}$	$\pm\frac{1}{36}$	$\pm\frac{1}{48}$	$\frac{1}{72}$
Weiten :	1	144	36	16	9	4	9	16	1	1	9	4	1	1	1	1

Davon sind:

12-verzweigt (Fixpunkte): $i\infty, \frac{1}{72}$

6-verzweigt: keine

4-verzweigt: $\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \pm\frac{1}{24}, \pm\frac{1}{48}$
mit:

$$-\frac{1}{24} \overset{G_{12}}{\sim} \frac{1}{24} \overset{G_{12}}{\sim} \frac{1}{8}$$
$$-\frac{1}{48} \overset{G_{12}}{\sim} \frac{1}{16} \overset{G_{12}}{\sim} \frac{1}{48}$$

3-verzweigt: $\frac{1}{9}, \frac{1}{18}, \pm\frac{1}{36}$
mit:

$$-\frac{1}{36} \overset{G_{12}}{\sim} \frac{1}{18} \overset{G_{12}}{\sim} \frac{1}{36} \overset{G_{12}}{\sim} \frac{1}{9}$$

2-verzweigt: keine

für die restlichen Spitzen gilt:

$$-\tfrac{5}{12}\overset{G_2}{\sim}-\tfrac{1}{3}\overset{G_2}{\sim}-\tfrac{1}{4}\overset{G_2}{\sim}-\tfrac{1}{6}\overset{G_2}{\sim}-\tfrac{1}{12}\overset{G_2}{\sim}0\overset{G_2}{\sim}\tfrac{1}{12}\overset{G_2}{\sim}\tfrac{1}{6}\overset{G_2}{\sim}\tfrac{1}{4}\overset{G_2}{\sim}\tfrac{1}{3}\overset{G_2}{\sim}\tfrac{5}{12}\overset{G_2}{\sim}\tfrac{1}{2}\ .$$

Wir sehen, daß eine l-verzweigte Spitze zu einem Zyklus der Länge $\frac{12}{l}$ gehört.
Eine erzeugende Funktion H_{144} für G_{12} hat als Modulfunktion für $\Gamma_0(144)$ die Ordnung 12. Wir legen den Pol bei $i\infty$ und die Nullstelle bei 0 fest. Aus jedem Zyklus äquivalenter Spitzen nehmen wir eine heraus und erhalten nachfolgende Gleichungen. Wir benutzen die Bedingung $\sum r_\delta = 0$ um r_{144} zu eliminieren, weiterhin ist $r_2 = r_3 = r_4 = r_6 = r_8 = r_9 = r_{16} = r_{18} = 0$.

$$\begin{aligned}
v(0) &= \frac{1}{24}(-132r_{12} - 138r_{24} - 140r_{36} - 141r_{48} - 142r_{72} - 143r_{144}) \\
&= \frac{1}{24}(11r_{12} + 5r_{24} + 3r_{36} + 2r_{48} + r_{72}) \\
v(\frac{1}{36}) &= \frac{1}{24}\sum_{\delta|144}\frac{1}{\delta}((\delta,36)^2 - \delta)r_\delta \\
&= \frac{1}{24}(11r_{12} + 5r_{24} + 35r_{36} + 2r_{48} + 17r_{72} + 8r_{144}) \\
&= \frac{1}{24}(3r_{12} - 3r_{24} + 27r_{36} - 6r_{48} + 9r_{72}) \\
v(\frac{1}{24}) &= \frac{1}{24}\sum_{\delta|144}\frac{1}{\delta}((\delta,24)^2 - \delta)r_\delta \\
&= \frac{1}{24}(11r_{12} + 23r_{24} + 3r_{36} + 11r_{48} + 7r_{72} + 3r_{144}) \\
&= \frac{1}{24}(8r_{12} + 20r_{24} + 0r_{36} + 8r_{48} + 4r_{72}) \\
v(\frac{1}{48}) &= \frac{1}{24}\sum_{\delta|144}\frac{1}{\delta}((\delta,48)^2 - \delta)r_\delta \\
&= \frac{1}{24}(11r_{12} + 23r_{24} + 3r_{36} + 47r_{48} + 7r_{72} + 15r_{144}) \\
&= \frac{1}{24}(-4r_{12} + 8r_{24} - 12r_{36} + 32r_{48} - 8r_{72}) \\
v(\frac{1}{72}) &= \frac{1}{24}\sum_{\delta|144}\frac{1}{\delta}((\delta,72)^2 - \delta)r_\delta \\
&= \frac{1}{24}(11r_{12} + 23r_{24} + 35r_{36} + 11r_{48} + 71r_{72} + 35r_{144}) \\
&= \frac{1}{24}(-24r_{12} - 12r_{24} + 0r_{36} - 24r_{48} + 36r_{72})
\end{aligned}$$

Hier ist zu beobachten, daß die Verzweigungsordnung der einzelnen Spitzen als ggT der Koeffizienten der r_δ auftritt, nachdem r_{144} eliminiert wurde, d.h. nachdem sichergestellt wurde, daß die r_δ zu einer Funktion von G_{12} gehören.

Wir lösen das LGS

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 11 & 5 & 3 & 2 & 1 & 24 \\ 1 & -1 & 9 & -2 & 3 & 0 \\ 8 & 20 & 0 & 8 & 4 & 0 \\ -4 & 8 & -12 & 32 & -8 & 0 \\ -8 & -4 & 0 & -8 & 12 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccccc|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

und erhalten

$$r_{12} = 3,\ r_{24} = -2,\ r_{36} = -1,\ r_{48} = 1,\ r_{72} = 2,\ r_{144} = -r_{12} - r_{24} - r_{36} - r_{48} - r_{72} = -3,$$

also als Erzeugende für $< \Gamma_0(144), S_{12} >$

$$H_{144} = \frac{\eta(12\tau)^3\eta(48\tau)\eta(72\tau)^2}{\eta(24\tau)^2\eta(36\tau)\eta(144\tau)^3} \ .$$

4.9 Die Translation S_{24}

Die Transformation $S_{24} = \left(\begin{smallmatrix} 24 & 1 \\ 0 & 24 \end{smallmatrix}\right)$ liegt im Normalisator von $\Gamma_0(n)$ genau dann, wenn $576|n$. In diesem Fall ist

$$G_{24} =< \Gamma_0(n), S_{24} >$$

eine zyklische Erweiterung der Ordnung 24. Die gesamte Restklasse $\Gamma_0(n) \cdot S_{24}$ ist gegeben durch die Transformationen

$$A = \left(\begin{smallmatrix} 24a & a+24b \\ 24nc & 124 \end{smallmatrix}\right) \text{ mit } \det(A) = 576ad - 24nc(a+3b) = 576 \ .$$

Aus $A^2 \neq I$ folgt, daß bei der Erweiterung von G_{12} zu G_{24} keine neuen Fixpunkte hinzukommen. Die Verzweigungspunkte mit ihren Ordnungen lassen sich also, wie in den letzten beiden Abschnitten durch „Zusammensetzen“von Verzweigungspunkten und Ordnungen von G_3 und G_8 gewinnen. Wir müssen wieder 4 Fälle unterscheiden:

$n = 2^\alpha 3^{\alpha'} k,\ (6,k) = 1$:

α, α' ungerade: Es ist $p_{8,4} = 0,\ p_{8,2} = p_{8,8} = \frac{1}{4}\sigma_\infty(n),\ p_3 = \frac{1}{2}\sigma_\infty(n)$, also

$$\begin{aligned} p_{24,24} &= \frac{1}{8}\sigma_\infty(n) \\ p_{24,12} &= 0 \\ p_{24,8} &= p_{8,8} - p_{24,24} = \frac{1}{8}\sigma_\infty(n) \\ p_{24,6} &= \frac{1}{8}\sigma_\infty(n) \\ p_{24,4} &= 0 \\ p_{24,3} &= p_3 - p_{24,24} - p_{24,12} - p_{24,6} = \frac{1}{4}\sigma_\infty(n) \\ p_{24,2} &= p_{8,2} - p_{24,6} = \frac{1}{8}\sigma_\infty(n) \end{aligned}$$

α ungerade,α' gerade: Es ist $p_{8,4} = 0,\ p_{8,2} = p_{8,8} = \frac{1}{4}\sigma_\infty(n),\ p_3 = \frac{1}{4}\sigma_\infty(n)$, also

$$\begin{aligned}
p_{24,24} &= \frac{1}{16}\sigma_\infty(n)\\
p_{24,12} &= 0\\
p_{24,8} &= p_{8,8} - p_{24,24} = \frac{3}{16}\sigma_\infty(n)\\
p_{24,6} &= \frac{1}{16}\sigma_\infty(n)\\
p_{24,4} &= 0\\
p_{24,3} &= p_3 - p_{24,24} - p_{24,12} - p_{24,6} = \frac{1}{8}\sigma_\infty(n)\\
p_{24,2} &= p_{8,2} - p_{24,6} = \frac{3}{16}\sigma_\infty(n)
\end{aligned}$$

α gerade,α' ungerade: Es ist $p_{8,2} = 0,\ p_{8,4} = p_{8,8} = \frac{1}{6}\sigma_\infty(n),\ p_3 = \frac{1}{2}\sigma_\infty(n)$, also

$$\begin{aligned}
p_{24,24} &= \frac{1}{12}\sigma_\infty(n)\\
p_{24,12} &= \frac{1}{12}\sigma_\infty(n)\\
p_{24,8} &= p_{8,8} - p_{24,24} = \frac{1}{12}\sigma_\infty(n)\\
p_{24,6} &= 0\\
p_{24,4} &= p_{8,4} - p_{24,12} = \frac{1}{12}\sigma_\infty(n)\\
p_{24,3} &= p_3 - p_{24,24} - p_{24,12} - p_{24,6} = \frac{1}{3}\sigma_\infty(n)\\
p_{24,2} &= 0
\end{aligned}$$

α, α' gerade: Es ist $p_{8,2} = 0,\ p_{8,4} = p_{8,8} = \frac{1}{6}\sigma_\infty(n),\ p_3 = \frac{1}{4}\sigma_\infty(n)$, also

$$\begin{aligned}
p_{24,24} &= \frac{1}{24}\sigma_\infty(n)\\
p_{24,12} &= \frac{1}{24}\sigma_\infty(n)\\
p_{24,8} &= p_{8,8} - p_{24,24} = \frac{3}{24}\sigma_\infty(n)\\
p_{24,6} &= 0\\
p_{24,4} &= p_{8,4} - p_{24,12} = \frac{3}{24}\sigma_\infty(n)\\
p_{24,3} &= p_3 - p_{24,24} - p_{24,12} - p_{24,6} = \frac{1}{6}\sigma_\infty(n)\\
p_{24,2} &= 0
\end{aligned}$$

Wir fassen zusammen:

Satz 41 *Es sei* $n = 2^\alpha 3^{\alpha'} k,\ (6,k) = 1,\ \alpha \geq 6,\ \alpha' \geq 2$. *Dann liegt* S_{24} *im Normalisator* $\mathcal{N}_n$ *von* $\Gamma_0(n)$. *Die Gruppenerweiterung*

$$G_{24} = < \Gamma_0(n), S_{24} >$$

hat nur parabolische Verzweigungspunkte:

Eine Spitze $s = \frac{a}{b}$, $2^{\beta}||b$, $3^{\beta'}||b$ *von* $\Gamma_0(n)$ *hat Verzweigungsordnung* 2, *wenn* $2\beta = \alpha + 1$ *und* $2\beta' < \alpha' + 1$. *Deren Anzahl* $p_{24,2}$ *ist*

$$p_{24,2} = \begin{cases} \frac{1}{8}\sigma_{\infty}(n) & \alpha, \alpha' \text{ ungerade} \\ \frac{3}{16}\sigma_{\infty}(n) & \alpha \text{ ungerade}, \alpha' \text{ gerade} \\ 0 & \alpha \text{ gerade} \end{cases}$$

s *hat Verzweigungsordnung* 3, *wenn* $2\beta < \alpha + 1$ *und* $2\beta' \geq \alpha' + 1$. *Deren Anzahl* $p_{24,3}$ *ist*

$$p_{24,3} = \begin{cases} \frac{1}{4}\sigma_{\infty}(n) & \alpha, \alpha' \text{ ungerade} \\ \frac{1}{8}\sigma_{\infty}(n) & \alpha \text{ ungerade}, \alpha' \text{ gerade} \\ \frac{1}{3}\sigma_{\infty}(n) & \alpha \text{ gerade}, \alpha' \text{ ungerade} \\ \frac{1}{6}\sigma_{\infty}(n) & \alpha, \alpha' \text{ gerade} \end{cases}$$

s *hat Verzweigungsordnung* 4, *wenn* $2\beta = \alpha + 2$ *und* $2\beta' < \alpha' + 1$. *Deren Anzahl* $p_{24,4}$ *ist*

$$p_{24,4} = \begin{cases} 0 & \alpha \text{ ungerade} \\ \frac{1}{12}\sigma_{\infty}(n) & \alpha \text{ gerade}, \alpha' \text{ ungerade} \\ \frac{3}{24}\sigma_{\infty}(n) & \alpha, \alpha' \text{ gerade} \end{cases}$$

s *hat Verzeigungsordnung* 6, *wenn* $2\beta = \alpha + 1$ *und* $2\beta' \geq \alpha' + 1$. *Deren Anzahl* $p_{24,6}$ *ist*

$$p_{24,6} = \begin{cases} \frac{1}{8}\sigma_{\infty}(n) & \alpha, \alpha' \text{ ungerade} \\ \frac{1}{16}\sigma_{\infty}(n) & \alpha \text{ ungerade}, \alpha' \text{ gerade} \\ 0 & \alpha \text{ gerade} \end{cases}$$

s *hat Verzeigungsordnung* 8, *wenn* $2\beta \geq \alpha + 3$ *und* $2\beta' < \alpha' + 1$. *Deren Anzahl* $p_{24,8}$ *ist*

$$p_{24,8} = \begin{cases} \frac{1}{8}\sigma_{\infty}(n) & \alpha, \alpha' \text{ ungerade} \\ \frac{3}{16}\sigma_{\infty}(n) & \alpha \text{ ungerade}, \alpha' \text{ gerade} \\ \frac{1}{12}\sigma_{\infty}(n) & \alpha \text{ gerade}, \alpha' \text{ ungerade} \\ \frac{3}{24}\sigma_{\infty}(n) & \alpha, \alpha' \text{ gerade} \end{cases}$$

s *hat Verzweigungsordnung* 12, *wenn* $2\beta = \alpha + 2$ *und* $2\beta' \geq \alpha' + 1$. *Deren Anzahl* $p_{24,12}$ *ist*

$$p_{24,12} = \begin{cases} 0 & \alpha \text{ ungerade} \\ \frac{1}{12}\sigma_{\infty}(n) & \alpha \text{ gerade}, \alpha' \text{ ungerade} \\ \frac{1}{24}\sigma_{\infty}(n) & \alpha, \alpha' \text{ gerade} \end{cases}$$

s *hat Verzeigungsordnung* 24, *wenn* $2\beta \geq \alpha + 3$ *und* $2\beta' \geq \alpha' + 1$. *Deren Anzahl* $p_{24,24}$ *ist*

$$p_{24,24} = \begin{cases} \frac{1}{8}\sigma_{\infty}(n) & \alpha, \alpha' \text{ ungerade} \\ \frac{1}{16}\sigma_{\infty}(n) & \alpha \text{ ungerade}, \alpha' \text{ gerade} \\ \frac{1}{12}\sigma_{\infty}(n) & \alpha \text{ gerade}, \alpha' \text{ ungerade} \\ \frac{1}{24}\sigma_{\infty}(n) & \alpha, \alpha' \text{ gerade} \end{cases}$$

Das Geschlecht g_{24} von G_{24} ist gegeben durch

$$g_{24} = \frac{1}{24}(g + 23 - \sum_{l|24} \frac{l-1}{2} p_{24,l}) = \begin{cases} \frac{1}{24}(g + 23 - \frac{5}{2}\sigma_\infty(n)) & \alpha, \alpha' \textit{ ungerade} \\ \frac{1}{24}(g + 23 - \frac{7}{4}\sigma_\infty(n) & \alpha \textit{ ungerade}, \alpha' \textit{ gerade} \\ \frac{1}{24}(g + 23 - \frac{13}{6}\sigma_\infty(n)) & \alpha \textit{ gerade}, \alpha' \textit{ ungerade} \\ \frac{1}{24}(g + 23 - \frac{3}{2}\sigma_\infty(n)) & \alpha, \alpha' \textit{ gerade} . \end{cases}$$

Die ersten beiden n zeigen uns bereits, daß wir keine Fälle mit Geschlecht $g_{24} = 0$ erwarten dürfen:

n	g	σ_∞	$p_{24,2}$	$p_{24,3}$	$p_{24,4}$	$p_{24,6}$	$p_{24,8}$	$p_{24,12}$	$p_{24,24}$	g_{24}
576	73	48	0	8	6	0	6	2	2	1
1152	161	64	12	8	0	4	12	0	4	3

Literaturverzeichnis

[AL] Atkin/Lehner
Hecke Operators on $\Gamma_0(n)$
Math. Ann. 185 (1970) 134-60

[CN] Conway/Norton
Monstrous Moonshine
Bull. London Math. Soc. 11 (1979) 308-39

[F1] Robert Fricke
Lehrbuch der Algebra 3.Band
Vieweg & Sohn (1926)

[F2] Robert Fricke
Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen 2.Teil
Teubner Leipzig (1926)

[FLM] Frenkel/Lepowsky/Meurman
Vertex Operator Algebras and the Monster
Pure and applied Mathematics vol 134

[H] Heinz Helling
On the commensurability class of rational modular group
J. London Math. Soc. (2)2(1970) 67-72

[Kl] P.G. Kluit
On the Normaliser of $\Gamma_0(n)$
Modular Functions of One Variable V
Bonn, Springer (1976) 239-46

[Ku] A.G. Kurosh
Gruppentheorie I
Akademie-Verlag Berlin (1970)

[N1] Morris Newman
Construction and application of a class of modular functions
Proc. London Math. Soc.(3)7 (1957) 334-50

[N2] Morris Newman
Construction and application of a class of modular functions II
Proc. London Math. Soc.(3)9 (1959)

[RG] Rademacher/Grosswald
Dedekind Sums
The Corus Math. Monographs Nr.16

[S] Bruno Schoeneberg
Elliptic Modular Functions
Springer Verlag

Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich für die vorliegende Arbeit außer der im Literaturverzeichnis angegeben Literatur keine weiteren Hilfsmittel verwendet habe.

Karlsruhe, den 23. Dezember 94

(Markus Püschel)