

# Simulación de Sistemas Continuos y a Tramos

Prof. Dr. François E. Cellier  
Institut für Computational Science  
ETH Zürich

26 de junio 2007

# El Método de Líneas

Hasta ahora solamente tratamos con *ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE)*. Ahora queremos extender la discusión a las *ecuaciones diferenciales parciales (PDE)*.

Dada la PDE describiendo la difusión de calor en una sola dimensión del espacio:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Puede discretizarse la variable del espacio:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_j} \approx \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\delta x^2}$$

manteniendo continua la variable del tiempo.

De esa forma puede convertirse la PDE a un conjunto de ODEs:

$$\frac{du_j}{dt} \approx \sigma \cdot \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\delta x^2}$$

# La Diferenciación en el Espacio

Tiene sentido diferenciar respecto a la variable del espacio con el mismo orden de aproximación que se utiliza para la integración a través de la variable del tiempo. Para ello podemos servirnos nuevamente de los polinomios de Newton-Gregory.

Por ejemplo si queremos obtener una aproximación de orden 4 de la segunda derivada en el espacio, utilizamos un polinomio de orden 4 pasando por los cinco puntos  $x_{i-2}$ ,  $x_{i-1}$ ,  $x_i$ ,  $x_{i+1}$  y  $x_{i+2}$ .

Usamos un polinomio de Newton-Gregory hacia atrás alrededor del punto  $x_{i+2}$ :

$$u(x) = u_{i+2} + s \nabla u_{i+2} + \left( \frac{s^2}{2} + \frac{s}{2} \right) \nabla^2 u_{i+2} + \left( \frac{s^3}{6} + \frac{s^2}{2} + \frac{s}{3} \right) \nabla^3 u_{i+2} + \dots$$

Entonces:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\delta x^2} \left[ \nabla^2 u_{i+2} + (s+1) \nabla^3 u_{i+2} + \left( \frac{s^2}{2} + \frac{3s}{2} + \frac{11}{12} \right) \nabla^4 u_{i+2} + \dots \right]$$

# La Diferenciación en el Espacio II

Evaluamos en el punto  $x = x_i$ , es decir en  $s = -2$ , y truncamos el operador  $\nabla$  después del término de orden cuatro:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} \approx \frac{1}{12\delta x^2} (-u_{i+2} + 16u_{i+1} - 30u_i + 16u_{i-1} - u_{i-2})$$

Los métodos de orden 3 tienen que pasar por 4 puntos. Entonces no es posible hacerlo de forma simétrica. Por ejemplo podemos tratar de obtener un método que pasa por los 4 puntos  $x_{i-1}$ ,  $x_i$ ,  $x_{i+1}$  y  $x_{i+2}$ .

Identificando los parámetros del método obtenemos:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} \approx \frac{1}{\delta x^2} (0u_{i+2} + u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$$

es decir, el método simétrico de orden 2 en realidad es un método de orden 3.

# La Diferenciación en el Espacio II

Evaluamos en el punto  $x = x_i$ , es decir en  $s = -2$ , y truncamos el operador  $\nabla$  después del término de orden cuatro:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} \approx \frac{1}{12\delta x^2} (-u_{i+2} + 16u_{i+1} - 30u_i + 16u_{i-1} - u_{i-2})$$

Los métodos de orden 3 tienen que pasar por 4 puntos. Entonces no es posible hacerlo de forma simétrica. Por ejemplo podemos tratar de obtener un método que pasa por los 4 puntos  $x_{i-1}$ ,  $x_i$ ,  $x_{i+1}$  y  $x_{i+2}$ .

Identificando los parámetros del método obtenemos:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} \approx \frac{1}{\delta x^2} (0u_{i+2} + u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$$

es decir, el método simétrico de orden 2 en realidad es un método de orden 3.

**Es siempre así. Los métodos simétricos obtienen un orden de aproximación adicional.**

## La Diferenciación en el Espacio III

En proximidad del borde del dominio no podemos usar más métodos simétricos. Por ejemplo, para obtener un método de orden 4 en el punto  $x_2$  podemos desarrollar un polinomio Newton-Gregory hacia atrás alrededor del punto  $u_5$  y evaluarlo en  $s = -3$ , o alternativamente podemos desarrollar un polinomio Newton-Gregory hacia adelante alrededor del punto  $u_1$  y evaluarlo en  $s = +1$ .

Si el dominio contiene 11 puntos en el espacio y si queremos desarrollar un método de orden 4, usamos las siguientes fórmulas para los puntos en proximidad del borde:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_1} = \frac{1}{12\delta x^2} (11u_5 - 56u_4 + 114u_3 - 104u_2 + 35u_1)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_2} = \frac{1}{12\delta x^2} (-u_5 + 4u_4 + 6u_3 - 20u_2 + 11u_1)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_{10}} = \frac{1}{12\delta x^2} (11u_{11} - 20u_{10} + 6u_9 + 4u_8 - u_7)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_{11}} = \frac{1}{12\delta x^2} (35u_{11} - 104u_{10} + 114u_9 - 56u_8 + 11u_7)$$

# Condiciones de Borde

Debemos hablar del tema de las *condiciones de borde*. Cada PDE está acompañada no sólo por condiciones iniciales, sino también por condiciones de borde.

La ecuación de la difusión de calor en una dimensión del espacio,  $x \in [0.0, 1.0]$  requiere de dos condiciones de borde, por ejemplo:

$$u(x = 0.0, t) = 100.0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x = 1.0, t) = 0.0$$

# Condiciones de Borde

Debemos hablar del tema de las *condiciones de borde*. Cada PDE está acompañada no sólo por condiciones iniciales, sino también por condiciones de borde.

La ecuación de la difusión de calor en una dimensión del espacio,  $x \in [0.0, 1.0]$  requiere de dos condiciones de borde, por ejemplo:

$$u(x = 0.0, t) = 100.0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x = 1.0, t) = 0.0$$

El tipo de condiciones de borde más simple es la *condición de Dirichlet* que impone en el borde un valor a la variable  $u$ . En este caso simplemente tenemos que eliminar la ecuación diferencial en este punto y reemplazarla por una ecuación algebraica:

$$u_1 = 100.0$$

## Condiciones de Borde II

Otro tipo de condiciones de borde simple es la *condición de Neumann simétrica* que impone en el borde un valor de cero a la variable  $\frac{\partial u}{\partial x}$ .

En este caso usamos un truco. Doblamos el dominio, es decir ampliamos el dominio en el espacio a  $x \in [0.0, 2.0]$  y aplicamos la misma condición de borde en el punto  $x = 2.0$  que en el punto  $x = 0.0$ :

$$u_{21} = 100.0$$

Por simetría obtenemos de forma implícita en el centro la condición:

$$\frac{\partial u_{11}}{\partial x} = 0.0$$

pero no es necesario formular esa condición de forma explícita.

# Condiciones de Borde III

Entonces:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_{10}} = \frac{1}{12\delta x^2} (-u_{12} + 16u_{11} - 30u_{10} + 16u_9 - u_8)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_{11}} = \frac{1}{12\delta x^2} (-u_{13} + 16u_{12} - 30u_{11} + 16u_{10} - u_9)$$

y como ya sabemos por causa de la simetría que  $u_{12} = u_{10}$  y  $u_{13} = u_9$ :

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_{10}} = \frac{1}{12\delta x^2} (16u_{11} - 31u_{10} + 16u_9 - u_8)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_{11}} = \frac{1}{12\delta x^2} (-30u_{11} + 32u_{10} - 2u_9)$$

y ya no necesitamos más puntos simétricos, es decir, en realidad no tenemos que doblar el dominio.

## Condiciones de Borde IV

Un tercer tipo de condiciones de borde simple es la *condición temporal* que impone en el borde un valor a la variable  $\frac{\partial u}{\partial t}$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x = 0.0, t) = f(t)$$

En este caso simple reemplazamos la ecuación diferencial original en este punto por una nueva:

$$\dot{u}_1 = f(t)$$

# Condiciones de Borde V

Un cuarto tipo de condiciones de borde un poco más general es la *condición de Robin*:

$$g(u(x = 1.0, t)) + h \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x = 1.0, t) \right) = f(t)$$

donde  $f$ ,  $g$  y  $h$  son funciones del tiempo.

# Condiciones de Borde V

Un cuarto tipo de condiciones de borde un poco más general es la *condición de Robin*:

$$g(u(x = 1.0, t)) + h \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x = 1.0, t) \right) = f(t)$$

donde  $f$ ,  $g$  y  $h$  son funciones del tiempo.

Por ejemplo, podremos tener que tratar con una condición de borde del tipo:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x = 1.0, t) = -k \cdot (u(x = 1.0, t) - u_{\text{amb}}(t))$$

donde  $u_{\text{amb}}(t)$  es la temperatura del ambiente.

# Condiciones de Borde V

Un cuarto tipo de condiciones de borde un poco más general es la *condición de Robin*:

$$g(u(x = 1.0, t)) + h \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x = 1.0, t) \right) = f(t)$$

donde  $f$ ,  $g$  y  $h$  son funciones del tiempo.

Por ejemplo, podramos tener que tratar con una condición de borde del tipo:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x = 1.0, t) = -k \cdot (u(x = 1.0, t) - u_{\text{amb}}(t))$$

donde  $u_{\text{amb}}(t)$  es la temperatura del ambiente.

En este caso reemplazamos la derivada por una aproximación usando un polinomio de Newton-Gregory:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_{11}} = \frac{1}{12\delta x} (25u_{11} - 48u_{10} + 36u_9 - 16u_8 + 3u_7)$$

# Condiciones de Borde V

Un cuarto tipo de condiciones de borde un poco más general es la *condición de Robin*:

$$g(u(x = 1.0, t)) + h \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x = 1.0, t) \right) = f(t)$$

donde  $f$ ,  $g$  y  $h$  son funciones del tiempo.

Por ejemplo, podramos tener que tratar con una condición de borde del tipo:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x = 1.0, t) = -k \cdot (u(x = 1.0, t) - u_{\text{amb}}(t))$$

donde  $u_{\text{amb}}(t)$  es la temperatura del ambiente.

En este caso reemplazamos la derivada por una aproximación usando un polinomio de Newton-Gregory:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_{11}} = \frac{1}{12\delta x} (25u_{11} - 48u_{10} + 36u_9 - 16u_8 + 3u_7)$$

Despejando la incógnita  $u_{11}$  obtenemos una *condición de Dirichlet* equivalente:

$$u_{11} = \frac{12k \cdot \delta x \cdot u_{\text{amb}} + 48u_{10} - 36u_9 + 16u_8 - 3u_7}{12k \cdot \delta x + 25}$$

# Condiciones de Borde VI

A menudo tenemos que tratar con *condiciones de borde no lineales*. Por ejemplo:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x = 1.0, t) = -k \cdot (u(x = 1.0, t)^4 - u_{\text{amb}}(t)^4)$$

que puede transformarse en:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u_{11}) = & 12k \cdot \delta x \cdot u_{11}^4 + 25u_{11} - 12k \cdot \delta x \cdot u_{\text{amb}}^4 - 48u_{10} + 36u_9 \\ & - 16u_8 + 3u_7 = 0.0\end{aligned}$$

# Condiciones de Borde VI

A menudo tenemos que tratar con *condiciones de borde no lineales*. Por ejemplo:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x = 1.0, t) = -k \cdot (u(x = 1.0, t)^4 - u_{\text{amb}}(t)^4)$$

que puede transformarse en:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u_{11}) = & 12k \cdot \delta x \cdot u_{11}^4 + 25u_{11} - 12k \cdot \delta x \cdot u_{\text{amb}}^4 - 48u_{10} + 36u_9 \\ & - 16u_8 + 3u_7 = 0.0 \end{aligned}$$

De esa manera obtenemos una *condición de borde implícita* que puede resolverse usando una *iteración de Newton*.

# Condiciones de Borde VII

Finalmente queremos considerar la situación donde tenemos que tratar con *regiones en el espacio representadas por diferentes PDEs*.

## Condiciones de Borde VII

Finalmente queremos considerar la situación donde tenemos que tratar con *regiones en el espacio representadas por diferentes PDEs*.

Por ejemplo queremos simular la difusión de calor a través de dos materiales diferentes. Tenemos entonces dos capas colindantes representando los dos materiales:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma_u \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sigma_v \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

donde la PDE de  $u$  es válida en la región  $x \in [0.0, 1.0]$  mientras la PDE de  $v$  es válida en la región  $x \in [1.0, 1.1]$ .

## Condiciones de Borde VIII

Es muy común que tengamos condiciones de borde en la interfaz del tipo:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x = 1.0, t) = -k_u \cdot (u(x = 1.0, t) - v(x = 1.0, t))$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x = 1.0, t) = -k_v \cdot (v(x = 1.0, t) - u(x = 1.0, t))$$

que pueden transformarse a ecuaciones algebraicas lineales equivalentes:

$$\begin{aligned}(12k_u \cdot \delta x_u + 25)u_{11} - 12k_u \cdot \delta x_u \cdot v_1 &= 48u_{10} - 36u_9 + 16u_8 - 3u_7 \\ -12k_v \cdot \delta x_v \cdot u_{11} + (12k_v \cdot \delta x_v + 3)v_1 &= 16v_2 - 36v_3 + 48u_4 - 25v_5\end{aligned}$$

## Condiciones de Borde VIII

Es muy común que tengamos condiciones de borde en la interfaz del tipo:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x = 1.0, t) = -k_u \cdot (u(x = 1.0, t) - v(x = 1.0, t))$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}(x = 1.0, t) = -k_v \cdot (v(x = 1.0, t) - u(x = 1.0, t))$$

que pueden transformarse a ecuaciones algebraicas lineales equivalentes:

$$(12k_u \cdot \delta x_u + 25)u_{11} - 12k_u \cdot \delta x_u \cdot v_1 = 48u_{10} - 36u_9 + 16u_8 - 3u_7$$
$$-12k_v \cdot \delta x_v \cdot u_{11} + (12k_v \cdot \delta x_v + 3)v_1 = 16v_2 - 36v_3 + 48u_4 - 25v_5$$

Estas ecuaciones forman un *bucle algebraico* que puede resolverse de manera simbólica o de manera numérica.

# PDEs Parabólicas

Una de las PDEs más simples es la ecuación de la difusión de calor en una dimensión del espacio.

Consideramos un ejemplo completo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{10\pi^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ; \quad x \in [0, 1] ; \quad t \in [0, \infty)$$

$$u(x, t = 0) = \cos(\pi \cdot x)$$

$$u(x = 0, t) = \exp(-t/10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x = 1, t) = 0$$

# PDEs Parabólicas

Una de las PDEs más simples es la ecuación de la difusión de calor en una dimensión del espacio.

Consideramos un ejemplo completo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{10\pi^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ; \quad x \in [0, 1] ; \quad t \in [0, \infty)$$

$$u(x, t = 0) = \cos(\pi \cdot x)$$

$$u(x = 0, t) = \exp(-t/10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x = 1, t) = 0$$

Ese modelo puede convertirse al conjunto de ODEs siguiente usando el método de líneas:

$$u_1 = \exp(-t/10)$$

$$\dot{u}_2 = \frac{n^2}{10\pi^2} \cdot (u_3 - 2u_2 + u_1)$$

$$\dot{u}_3 = \frac{n^2}{10\pi^2} \cdot (u_4 - 2u_3 + u_2)$$

etc.

$$\dot{u}_n = \frac{n^2}{10\pi^2} \cdot (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})$$

$$\dot{u}_{n+1} = \frac{n^2}{5\pi^2} \cdot (-u_{n+1} + u_n)$$

# PDEs Parabólicas II

Se trata de un sistema lineal que puede representarse de la forma siguiente:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot u$$

donde:

$$\mathbf{A} = \frac{n^2}{10\pi^2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

# PDEs Parabólicas III

Podemos mirar la distribución de los autovalores de la matriz **A** en función de la discretización en el espacio:

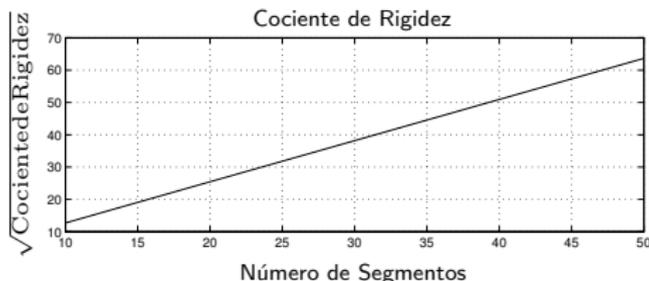
$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$
-0.0244	-0.0247	-0.0248	-0.0249	-0.0249
-0.1824	-0.2002	-0.2088	-0.2137	-0.2166
-0.3403	-0.4483	-0.5066	-0.5407	-0.5621
	-0.6238	-0.9884	-0.9183	-0.9929
		-0.8044	-1.2454	-1.4238
			-1.4342	-1.7693
				-1.9610

# PDEs Parabólicas III

Podemos mirar la distribución de los autovalores de la matriz **A** en función de la discretización en el espacio:

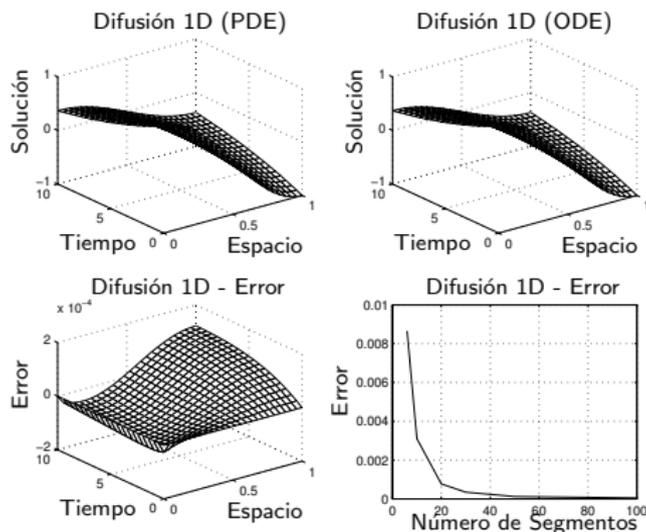
$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$
-0.0244	-0.0247	-0.0248	-0.0249	-0.0249
-0.1824	-0.2002	-0.2088	-0.2137	-0.2166
-0.3403	-0.4483	-0.5066	-0.5407	-0.5621
	-0.6238	-0.9884	-0.9183	-0.9929
		-0.8044	-1.2454	-1.4238
			-1.4342	-1.7693
				-1.9610

Entonces:



# PDEs Parabólicas IV

Como la solución analítica de este problema es conocida, puede calcularse el error global de la simulación.



# PDEs Parabólicas V

¿Qué pasa si estamos usando un método de orden 5?

$$u_1 = \exp(-t/10)$$

$$\dot{u}_2 = \frac{n^2}{120\pi^2} \cdot (u_6 - 6u_5 + 14u_4 - 4u_3 - 15u_2 + 10u_1)$$

$$\dot{u}_3 = \frac{n^2}{120\pi^2} \cdot (-u_5 + 16u_4 - 30u_3 + 16u_2 - u_1)$$

$$\dot{u}_4 = \frac{n^2}{120\pi^2} \cdot (-u_6 + 16u_5 - 30u_4 + 16u_3 - u_2)$$

etc.

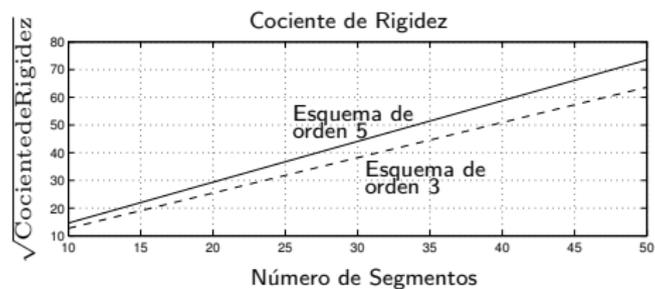
$$\dot{u}_{n-1} = \frac{n^2}{120\pi^2} \cdot (-u_{n+1} + 16u_n - 30u_{n-1} + 16u_{n-2} - u_{n-3})$$

$$\dot{u}_n = \frac{n^2}{120\pi^2} \cdot (16u_{n+1} - 31u_n + 16u_{n-1} - u_{n-2})$$

$$\dot{u}_{n+1} = \frac{n^2}{60\pi^2} \cdot (-15u_{n+1} + 16u_n - u_{n-1})$$

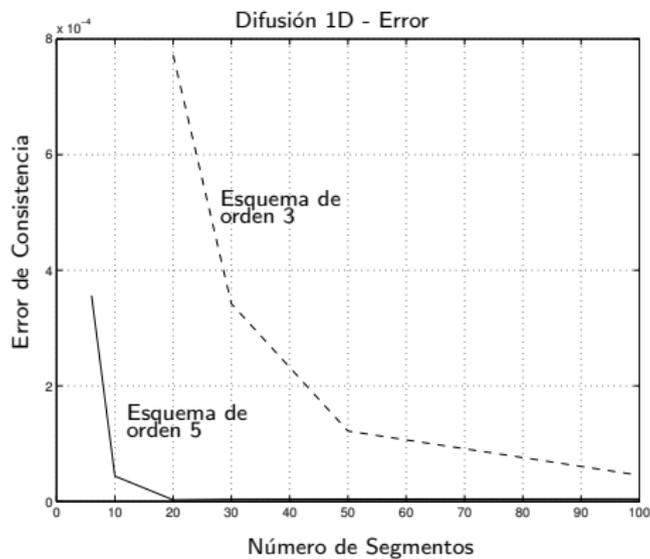
# PDEs Parabólicas VI

Comparando los cocientes de la rigidez de los métodos de órdenes 3 y 5:



# PDEs Parabólicas VII

Comparando los errores de los métodos de órdenes 3 y 5:



# PDEs Parabólicas VIII

El orden de la diferenciación en el espacio no sería tan importante si pudiéramos usar una discretización muy pequeña.

# PDEs Parabólicas VIII

El orden de la diferenciación en el espacio no sería tan importante si pudiéramos usar una discretización muy pequeña.

Entonces tratamos otra vez la idea de la extrapolación de Richardson, pero esa vez en el espacio en lugar del tiempo.

# PDEs Parabólicas VIII

El orden de la diferenciación en el espacio no sería tan importante si pudiéramos usar una discretización muy pequeña.

Entonces tratamos otra vez la idea de la extrapolación de Richardson, pero esa vez en el espacio en lugar del tiempo.

Trabajamos con 4 aproximaciones diferentes de orden 3:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_j}^{P_1} (\delta x^2) = \frac{u_{j+1} - u_j + u_{j-1}}{\delta x^2}$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_j}^{P_2} (4\delta x^2) = \frac{u_{j+2} - u_j + u_{j-2}}{4\delta x^2}$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_j}^{P_3} (9\delta x^2) = \frac{u_{j+3} - u_j + u_{j-3}}{9\delta x^2}$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_j}^{P_4} (16\delta x^2) = \frac{u_{j+4} - u_j + u_{j-4}}{16\delta x^2}$$

distinguidas entre ellas solamente por el tamaño de la discretización  $\delta x$ .

# PDEs Parabólicas IX

Desarrollando en una serie de Taylor:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\eta) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e_1 \cdot \eta + e_2 \cdot \frac{\eta^2}{2!} + e_3 \cdot \frac{\eta^3}{3!} + \dots$$

Entonces:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} P_1(\delta x^2) \approx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e_1 \cdot \delta x^2 + \frac{e_2}{2!} \cdot \delta x^4 + \frac{e_3}{3!} \cdot \delta x^6$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} P_2(4\delta x^2) \approx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e_1 \cdot (4\delta x^2) + \frac{e_2}{2!} \cdot (4\delta x^2)^2 + \frac{e_3}{3!} \cdot (4\delta x^2)^3$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} P_3(9\delta x^2) \approx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e_1 \cdot (9\delta x^2) + \frac{e_2}{2!} \cdot (9\delta x^2)^2 + \frac{e_3}{3!} \cdot (9\delta x^2)^3$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} P_4(16\delta x^2) \approx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e_1 \cdot (16\delta x^2) + \frac{e_2}{2!} \cdot (16\delta x^2)^2 + \frac{e_3}{3!} \cdot (16\delta x^2)^3$$

## PDEs Parabólicas X

En notación matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} P_1 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} P_2 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} P_3 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} P_4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} (\delta x^2)^0 & (\delta x^2)^1 & (\delta x^2)^2 & (\delta x^2)^3 \\ (4\delta x^2)^0 & (4\delta x^2)^1 & (4\delta x^2)^2 & (4\delta x^2)^3 \\ (9\delta x^2)^0 & (9\delta x^2)^1 & (9\delta x^2)^2 & (9\delta x^2)^3 \\ (16\delta x^2)^0 & (16\delta x^2)^1 & (16\delta x^2)^2 & (16\delta x^2)^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ e_1 \\ e_2/2 \\ e_3/6 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \begin{pmatrix} \frac{56}{35} & -\frac{28}{35} & \frac{8}{35} & -\frac{1}{35} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} P_1 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} P_2 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} P_3 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} P_4 \end{pmatrix}$$

# PDEs Parabólicas XI

Sustituyendo las ecuaciones obtenidas:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} \approx \frac{1}{5040\delta x^2} (-9u_{i+4} + 128u_{i+3} - 1008u_{i+2} + 8064u_{i+1} - 14350u_i + 8064u_{i-1} - 1008u_{i-2} + 128u_{i-3} - 9u_{i-4})$$

que es exactamente la fórmula central de orden 9 de la segunda derivada. De nuevo, la extrapolación de Richardson maximizó el orden de la aproximación.

# PDEs Hiperbólicas

Una de las PDEs hiperbólicas más simples es la ecuación de la propagación de ondas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

que puede fácilmente convertirse a dos PDEs de primer orden en el tiempo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= v \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\end{aligned}$$

# PDEs Hiperbólicas

Una de las PDEs hiperbólicas más simples es la ecuación de la propagación de ondas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

que puede fácilmente convertirse a dos PDEs de primer orden en el tiempo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= v \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\end{aligned}$$

Esta vez se requieren dos condiciones iniciales y dos condiciones de borde.

# PDEs Hiperbólicas II

Una especificación completa de un modelo podra ser:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad x \in [0, 1] \quad ; \quad t \in [0, \infty)$$

$$u(x, t = 0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = 0.0$$

$$u(x = 0, t) = 0.0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x = 1, t) = 0.0$$

# PDEs Hiperbólicas III

Este modelo PDE puede convertirse fácilmente a un conjunto de ODEs usando el método de líneas:

$$u_1 = 0.0$$

$$\dot{u}_2 = v_2$$

etc.

$$\dot{u}_{n+1} = v_{n+1}$$

$$v_1 = 0.0$$

$$\dot{v}_2 = n^2 (u_3 - 2u_2 + u_1)$$

$$\dot{v}_3 = n^2 (u_4 - 2u_3 + u_2)$$

etc.

$$\dot{v}_n = n^2 (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})$$

$$\dot{v}_{n+1} = 2n^2 (u_n - u_{n+1})$$

# PDEs Hiperbólicas IV

En forma matricial:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot u$$

donde:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}^{(n)} & \mathbf{I}^{(n)} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0}^{(n)} \end{pmatrix}$$

con:

$$\mathbf{A}_{21} = n^2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

# PDEs Hiperbólicas V

Podemos mirar la distribución de los autovalores de la matriz **A** en función de la discretización en el espacio:

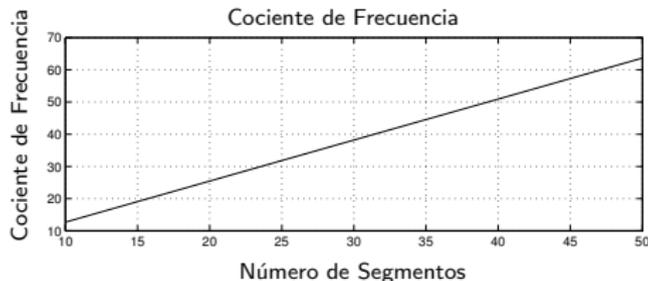
$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
$\pm 1.5529j$	$\pm 1.5607j$	$\pm 1.5643j$	$\pm 1.5663j$
$\pm 4.2426j$	$\pm 4.4446j$	$\pm 4.5399j$	$\pm 4.5922j$
$\pm 5.7956j$	$\pm 6.6518j$	$\pm 7.0711j$	$\pm 7.3051j$
	$\pm 7.8463j$	$\pm 8.9101j$	$\pm 9.5202j$
		$\pm 9.8769j$	$\pm 11.0866j$
			$\pm 11.8973j$

# PDEs Hiperbólicas V

Podemos mirar la distribución de los autovalores de la matriz **A** en función de la discretización en el espacio:

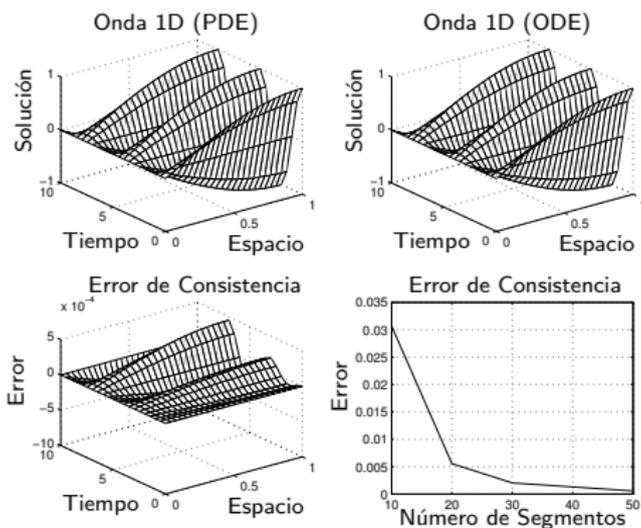
$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
$\pm 1.5529j$	$\pm 1.5607j$	$\pm 1.5643j$	$\pm 1.5663j$
$\pm 4.2426j$	$\pm 4.4446j$	$\pm 4.5399j$	$\pm 4.5922j$
$\pm 5.7956j$	$\pm 6.6518j$	$\pm 7.0711j$	$\pm 7.3051j$
	$\pm 7.8463j$	$\pm 8.9101j$	$\pm 9.5202j$
		$\pm 9.8769j$	$\pm 11.0866j$
			$\pm 11.8973j$

Entonces:



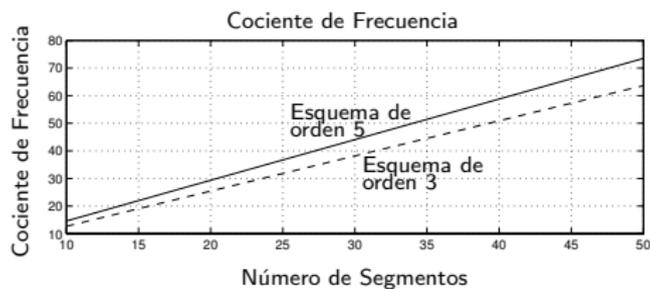
# PDEs Hiperbólicas VI

Como la solución analítica de ese problema es conocida, puede calcularse el error global de la simulación.



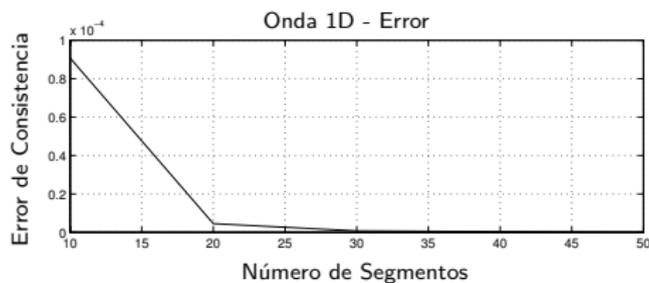
# PDEs Hiperbólicas VII

Comparando los cocientes de la frecuencia de los métodos de órdenes 3 y 5:



# PDEs Hiperbólicas VIII

Comparando los errores de los métodos de órdenes 3 y 5:



# PDEs Hiperbólicas IX

Comparando diferentes métodos de integración en el tiempo (método de orden 5 con 50 segmentos):

$h$	RK3	IEX3	BI3
0.1	inestable	0.6782e-4	0.4947e-6
0.05	inestable	0.8668e-5	0.2895e-7
0.02	inestable	0.5611e-6	0.1324e-8
0.01	0.7034e-7	0.7029e-7	0.2070e-8
0.005	0.8954e-8	0.8791e-8	0.2116e-8
0.002	0.2219e-8	0.2145e-8	0.2120e-8
0.001	0.2127e-8	0.2119e-8	0.2120e-8

$h$	AB3	ABM3	AM3	BDF3
0.1	inestable	inestable	inestable	basura
0.05	inestable	inestable	inestable	basura
0.02	inestable	inestable	inestable	basura
0.01	inestable	0.6996e-7	inestable	basura
0.005	0.7906e-7	0.8772e-8	0.8783e-8	0.9469e-2
0.002	0.5427e-8	0.2156e-8	0.2149e-8	0.1742e-6
0.001	0.2239e-8	0.2120e-8	0.2120e-8	0.4363e-7

# PDEs Hiperbólicas X

Representación gráfica:

