

Simulación de Sistemas Continuos y a Tramos

Prof. Dr. François E. Cellier
Institut für Computational Science
ETH Zürich

25 de junio 2007

El Dominio de la Precisión

Vimos que la estabilidad numérica de un algoritmo puede expresarse en el plano complejo $\lambda \cdot h$. Además vimos que una solución *numéricamente estable* no necesariamente es también una solución *precisa*.

Queremos investigar ahora si es posible obtener algo como un *dominio de la precisión* similar al *dominio de la estabilidad numérica*.

Empezamos con el sistema lineal:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \quad ; \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

usando la misma matriz \mathbf{A} que habíamos usado antes en el análisis de la estabilidad:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

que tiene dos autovalores sobre el círculo unitario formando un ángulo α con el eje real negativo.

Usamos condiciones iniciales normalizadas de:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El Dominio de la Precisión II

La solución analítica puede encontrarse fácilmente:

$$x_{\text{anal}} = \exp(\mathbf{A} \cdot (t - t_0)) \cdot x_0$$

Una solución numérica puede obtenerse usando uno de los algoritmos de la integración introducidos antes, por ejemplo el algoritmo RK4:

```

function [x] = rk4(A, h, x0)
    h2 = h/2;  h6 = h/6;
    x(:, 1) = x0;
    for i = 1 : 10/h,
        xx = x(:, i);
        k1 = A * xx;
        k2 = A * (xx + h2 * k1);
        k3 = A * (xx + h2 * k2);
        k4 = A * (xx + h * k3);
        x(:, i + 1) = xx + h6 * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4);
    end
return

```

El Dominio de la Precisión III

Simulamos a través de 10 segundos y calculamos el *error global*:

$$\epsilon_{\text{global}} = \|\mathbf{x}_{\text{anal}} - \mathbf{x}_{\text{simul}}\|_{\infty}$$

Iteramos sobre el paso de la integración h hasta que el error global se hace menor a un valor límite especificado, tol :

$$\epsilon_{\text{global}} \leq tol$$

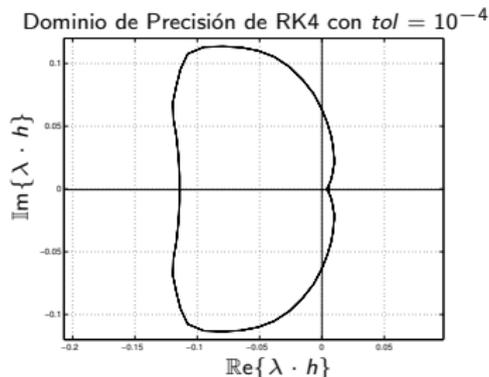


Figure: Dominio de precisión de RK4 con $tol = 10^{-4}$

El Dominio de la Precisión IV

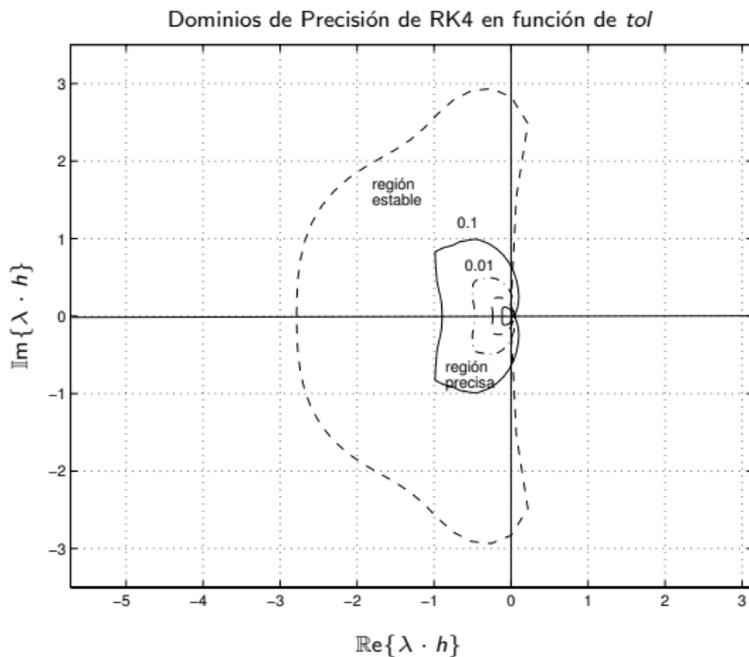


Figure: Dominios de precisión de RK4

El Dominio de la Precisión V

Desafortunadamente los resultados no son independientes del experimento. Dependen mucho de las *condiciones iniciales* que usamos.

El Dominio de la Precisión V

Desafortunadamente los resultados no son independientes del experimento. Dependen mucho de las *condiciones iniciales* que usamos.

Necesitamos algo mejor.

La Eficiencia de la Simulación

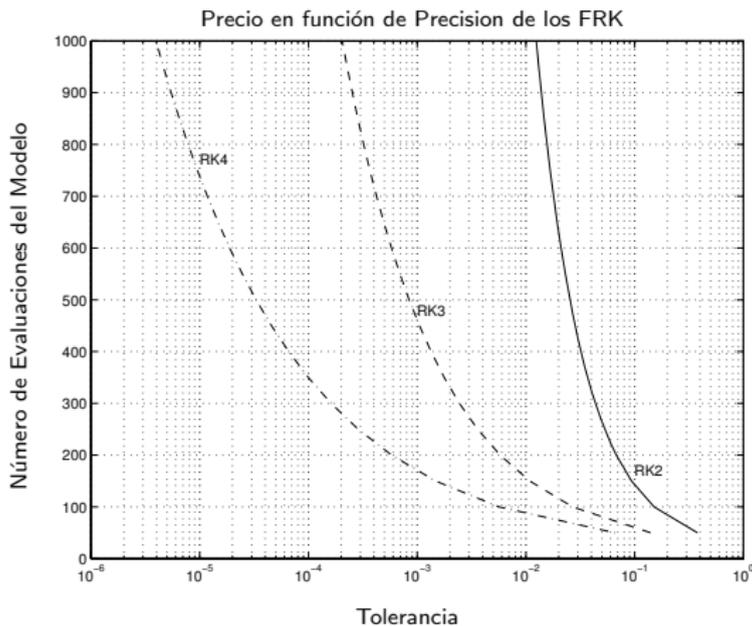


Figure: Eficiencia de la simulación por varios algoritmos FRK

Factor de Amortiguación y Frecuencia de Oscilación

Dado el *sistema lineal continuo*:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \quad ; \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

El *sistema lineal discreto*:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_{\text{anal}} \cdot \mathbf{x}_k \quad ; \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

con:

$$\mathbf{F}_{\text{anal}} = \exp(\mathbf{A} \cdot h)$$

tiene la misma solución como el sistema continuo en los *puntos de muestreo*, $k \cdot h$.

Entonces:

$$\text{Eig}\{\mathbf{F}_{\text{anal}}\} = \exp(\text{Eig}\{\mathbf{A}\} \cdot h)$$

Cada autovalor del sistema discreto corresponde a un autovalor del sistema continuo:

$$\lambda_{\text{disc}} = \exp(\lambda_{\text{cont}} \cdot h) = \exp((-σ + j \cdot ω) \cdot h) = \exp(-σ \cdot h) \cdot \exp(j \cdot ω \cdot h)$$

Factor de Amortiguación y Frecuencia de Oscilación II

Introducimos un nuevo plano complejo:

$$z = \exp(\lambda \cdot h)$$

Los ingenieros de control conocen muy bien a ese plano.

Factor de Amortiguación y Frecuencia de Oscilación II

Introducimos un nuevo plano complejo:

$$z = \exp(\lambda \cdot h)$$

Los ingenieros de control conocen muy bien a ese plano.

Introducimos también un *factor de amortiguación discreto*, σ_d y una *frecuencia de oscilación discreta*, ω_d :

$$\sigma_d = \sigma \cdot h$$

$$\omega_d = \omega \cdot h$$

Factor de Amortiguación y Frecuencia de Oscilación II

Introducimos un nuevo plano complejo:

$$z = \exp(\lambda \cdot h)$$

Los ingenieros de control conocen muy bien a ese plano.

Introducimos también un *factor de amortiguación discreto*, σ_d y una *frecuencia de oscilación discreta*, ω_d :

$$\sigma_d = \sigma \cdot h$$

$$\omega_d = \omega \cdot h$$

Entonces:

$$|z| = \exp(-\sigma_d)$$

$$\angle z = \omega_d$$

Factor de Amortiguación y Frecuencia de Oscilación II

Introducimos un nuevo plano complejo:

$$z = \exp(\lambda \cdot h)$$

Los ingenieros de control conocen muy bien a ese plano.

Introducimos también un *factor de amortiguación discreto*, σ_d y una *frecuencia de oscilación discreta*, ω_d :

$$\sigma_d = \sigma \cdot h$$

$$\omega_d = \omega \cdot h$$

Entonces:

$$|z| = \exp(-\sigma_d)$$

$$\angle z = \omega_d$$

Los valores σ_d y ω_d son el factor de amortiguación discreto y la frecuencia de oscilación discreta que esperaríamos si la simulación del modelo se hiciera analíticamente.

Factor de Amortiguación y Frecuencia de Oscilación III

En realidad usamos una simulación numérica. Su matriz $\mathbf{F}_{\text{simul}}$ aproxima la matriz \mathbf{F}_{anal} de la solución analítica.

Factor de Amortiguación y Frecuencia de Oscilación III

En realidad usamos una simulación numérica. Su matriz $\mathbf{F}_{\text{simul}}$ aproxima la matriz \mathbf{F}_{anal} de la solución analítica.

Entonces podemos definir para la matriz $\mathbf{F}_{\text{simul}}$:

$$\hat{z} = \exp(\hat{\lambda}_d)$$

con:

$$\hat{\lambda}_d = -\hat{\sigma}_d + j \cdot \hat{\omega}_d$$

y por eso:

$$\begin{aligned} |\hat{z}| &= \exp(-\hat{\sigma}_d) \\ \angle \hat{z} &= \hat{\omega}_d \end{aligned}$$

Factor de Amortiguación y Frecuencia de Oscilación III

En realidad usamos una simulación numérica. Su matriz $\mathbf{F}_{\text{simul}}$ aproxima la matriz \mathbf{F}_{anal} de la solución analítica.

Entonces podemos definir para la matriz $\mathbf{F}_{\text{simul}}$:

$$\hat{z} = \exp(\hat{\lambda}_d)$$

con:

$$\hat{\lambda}_d = -\hat{\sigma}_d + j \cdot \hat{\omega}_d$$

y por eso:

$$\begin{aligned} |\hat{z}| &= \exp(-\hat{\sigma}_d) \\ \angle \hat{z} &= \hat{\omega}_d \end{aligned}$$

El valor $\hat{\sigma}_d$ aproxima σ_d y el valor $\hat{\omega}_d$ aproxima ω_d .

El Gráfico de Amortiguación

En consecuencia tiene sentido introducir el *error de amortiguación*, ε_σ y el *error de frecuencia*, ε_ω :

$$\varepsilon_\sigma = \sigma_d - \hat{\sigma}_d$$

$$\varepsilon_\omega = \omega_d - \hat{\omega}_d$$

El Gráfico de Amortiguación

En consecuencia tiene sentido introducir el *error de amortiguación*, ε_σ y el *error de frecuencia*, ε_ω :

$$\varepsilon_\sigma = \sigma_d - \hat{\sigma}_d$$

$$\varepsilon_\omega = \omega_d - \hat{\omega}_d$$

Podemos dibujar la *amortiguación numérica*, $\hat{\sigma}_d$ en función de la *amortiguación analítica*, σ_d . Ese gráfico se llama el *gráfico de amortiguación*.

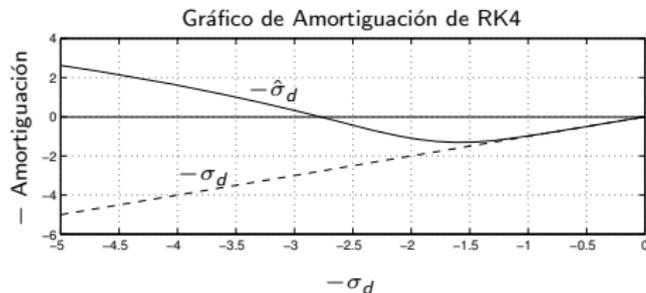


Figure: Gráfico de amortiguación de RK4

El Gráfico de Amortiguación V

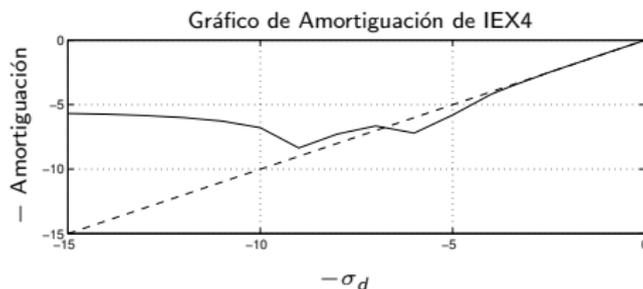


Figure: Gráfico de amortiguación de IEX4

En el caso del algoritmo IEX4 pasan cosas raras que tenemos que entender mejor. Su matriz \mathbf{F} es:

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{6} \cdot [\mathbf{I}^{(n)} - \mathbf{A} \cdot h]^{-1} + 4 \cdot [\mathbf{I}^{(n)} - \frac{\mathbf{A} \cdot h}{2}]^{-2} - \frac{27}{2} \cdot [\mathbf{I}^{(n)} - \frac{\mathbf{A} \cdot h}{3}]^{-3} + \frac{32}{3} \cdot [\mathbf{I}^{(n)} - \frac{\mathbf{A} \cdot h}{4}]^{-4}$$

La “Estrella del Orden” (Amortiguación)

Podemos analizar el caso escalar con:

$$q = \lambda \cdot h$$

Obtenemos:

$$f = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-q} + 4 \cdot \frac{1}{(1-q/2)^2} - \frac{27}{2} \cdot \frac{1}{(1-q/3)^3} + \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{(1-q/4)^4}$$

Entonces:

$$\hat{\sigma}_d = -\log(|f|)$$

Esta ecuación tiene una solución para todos los valores complejos de q , no solamente para los valores $q = -\sigma_d$.

La “Estrella del Orden” (Amortiguación) II

Dibujamos el *error de la amortiguación*, ε_σ en función de σ_d y de ω_d :

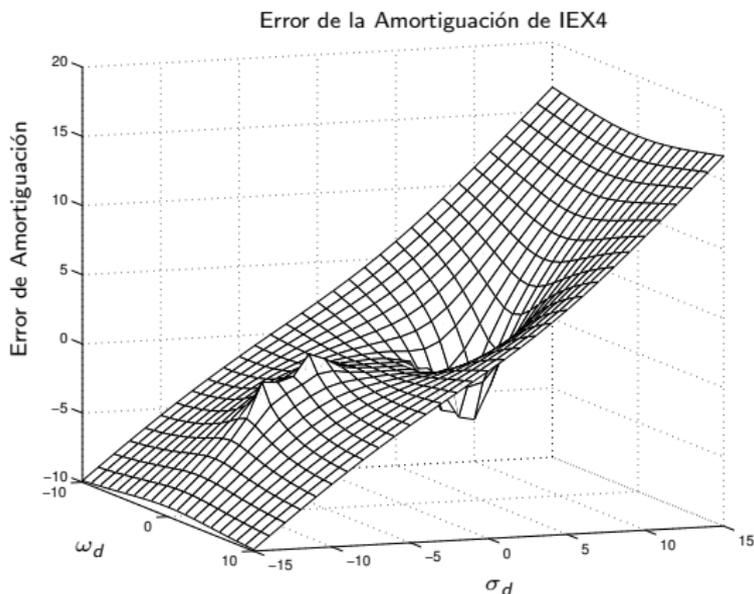


Figure: Error de la amortiguación de IEX4

La “Estrella del Orden” (Amortiguación) IV

La función:

$$f = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-q} + 4 \cdot \frac{1}{(1-q/2)^2} - \frac{27}{2} \cdot \frac{1}{(1-q/3)^3} + \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{(1-q/4)^4}$$

es una *función racional estrictamente propia*. Tiene 10 polos y 9 ceros.

La “Estrella del Orden” (Amortiguación) IV

La función:

$$f = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-q} + 4 \cdot \frac{1}{(1-q/2)^2} - \frac{27}{2} \cdot \frac{1}{(1-q/3)^3} + \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{(1-q/4)^4}$$

es una *función racional estrictamente propia*. Tiene 10 polos y 9 ceros.

La amortiguación de los polos es $-\infty$. Por eso, los métodos útiles para la simulación deben tener todos sus polos en la parte derecha del plano complejo $\lambda \cdot h$.

La “Estrella del Orden” (Amortiguación) IV

La función:

$$f = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-q} + 4 \cdot \frac{1}{(1-q/2)^2} - \frac{27}{2} \cdot \frac{1}{(1-q/3)^3} + \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{(1-q/4)^4}$$

es una *función racional estrictamente propia*. Tiene 10 polos y 9 ceros.

La amortiguación de los polos es $-\infty$. Por eso, los métodos útiles para la simulación deben tener todos sus polos en la parte derecha del plano complejo $\lambda \cdot h$.

La amortiguación de los ceros es $+\infty$. Los ceros entonces son útiles en la parte izquierda del plano complejo $\lambda \cdot h$.

La “Estrella del Orden” (Amortiguación) IV

La función:

$$f = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-q} + 4 \cdot \frac{1}{(1-q/2)^2} - \frac{27}{2} \cdot \frac{1}{(1-q/3)^3} + \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{(1-q/4)^4}$$

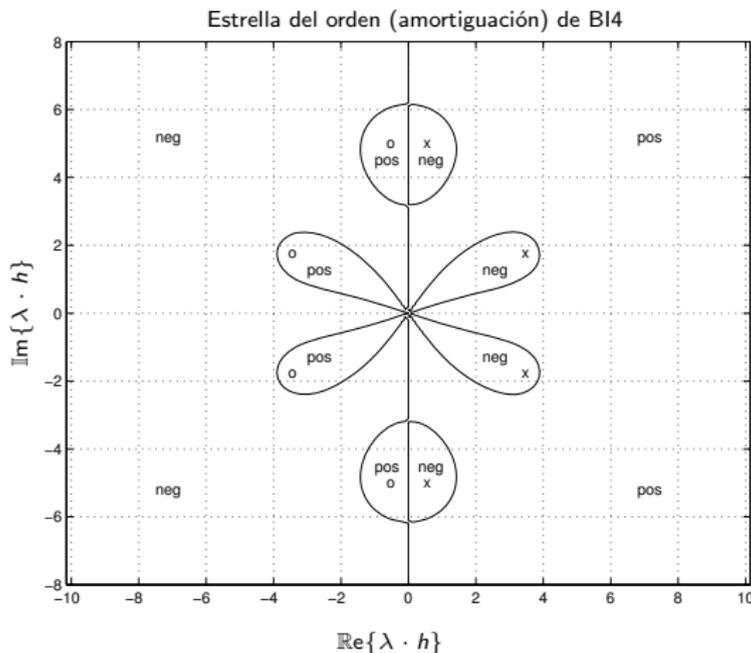
es una *función racional estrictamente propia*. Tiene 10 polos y 9 ceros.

La amortiguación de los polos es $-\infty$. Por eso, los métodos útiles para la simulación deben tener todos sus polos en la parte derecha del plano complejo $\lambda \cdot h$.

La amortiguación de los ceros es $+\infty$. Los ceros entonces son útiles en la parte izquierda del plano complejo $\lambda \cdot h$.

En la proximidad del origen no podemos aceptar ni polos ni ceros. Al menos no podemos aceptarlos en la parte izquierda del plano complejo $\lambda \cdot h$.

La “Estrella del Orden” (Amortiguación) V



Las estrellas del orden de los métodos F-estables son simétricas con el eje imaginario a causa de la simetría de sus polos y ceros .

El Gráfico de Frecuencia

Podemos también analizar el error de la frecuencia. Podemos dibujar la *frecuencia discreta numérica*, $\hat{\omega}_d$ en función de la *frecuencia discreta analítica*, ω_d .

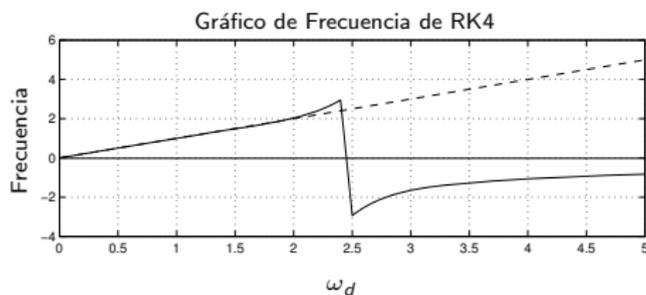
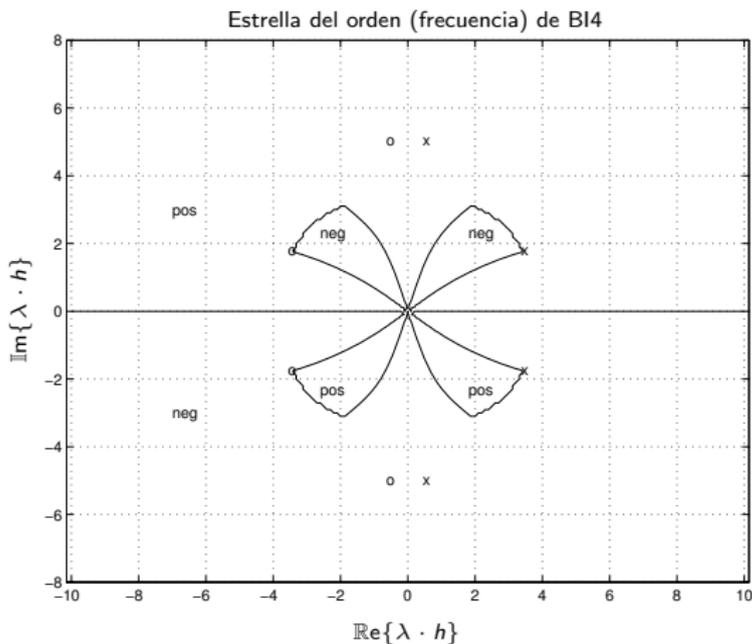


Figure: Gráfico de frecuencia de RK4

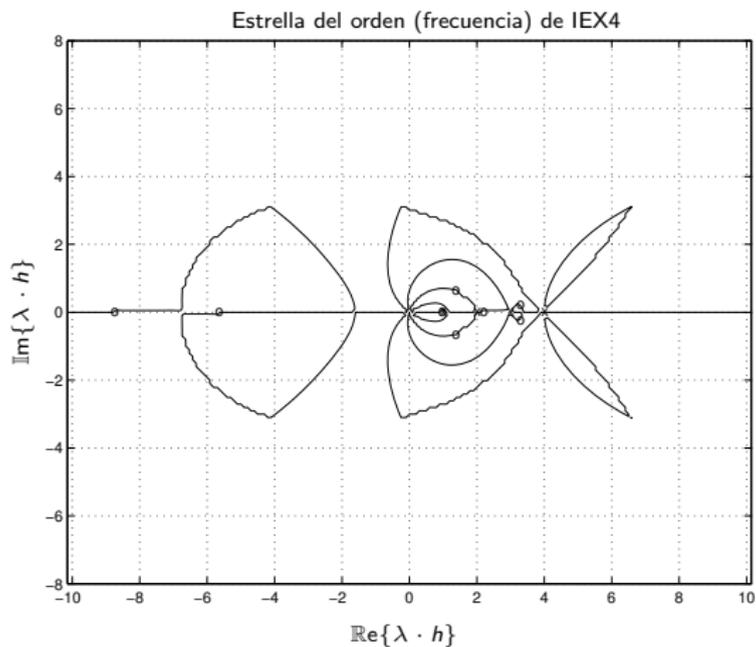
La frecuencia tiene un período de 2π . Sin embargo, el comportamiento de la frecuencia solamente nos interesará en la proximidad del origen. Entonces no nos importa su periodicidad.

La “Estrella del Orden” (Frecuencia)

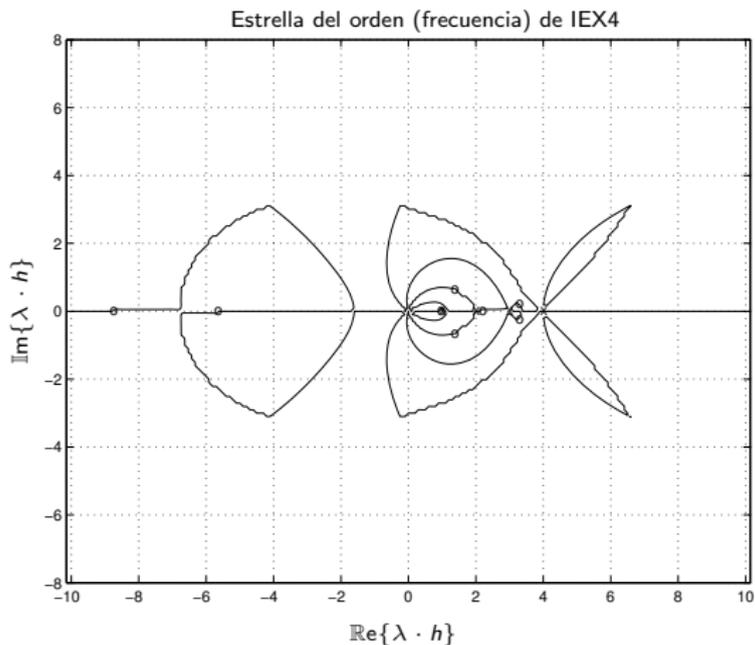
También es posible dibujar el *error de la frecuencia*, ε_ω en función de σ_d y de ω_d .
Dibujamos entonces la “estrella del orden” (frecuencia):



La “Estrella del Orden” (Frecuencia) II



La “Estrella del Orden” (Frecuencia) II



Dibujé estas “estrellas del orden” (frecuencia) ... porque son bonitas.

Las Regiones Asintóticas

Miramos otra vez los gráficos de amortiguación i de frecuencia. Hay regiones donde los errores son muy pequeños. Estas regiones se llaman las *regiones asintóticas*.

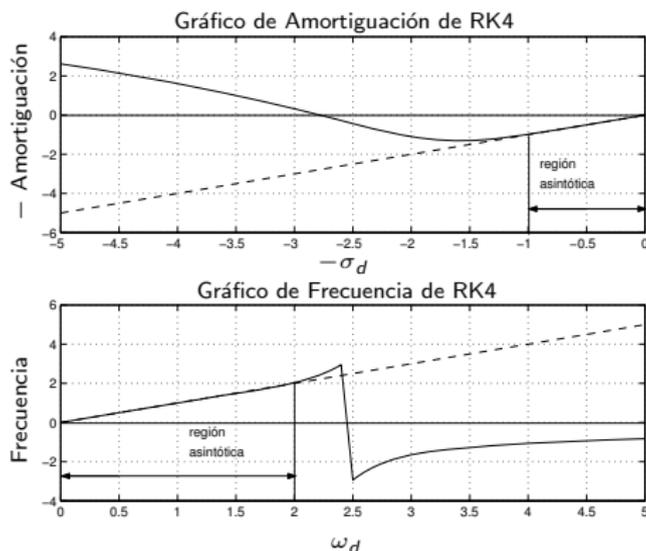


Figure: Regiones asintóticas de RK4

El Dominio de la Precisión VI

Tiene sentido definir un error combinado del error de la amortiguación y el error de la frecuencia:

$$OS_{err} = |\sigma_d - \hat{\sigma}_d| + |\omega_d - \hat{\omega}_d|$$

El Dominio de la Precisión VI

Tiene sentido definir un error combinado del error de la amortiguación y el error de la frecuencia:

$$os_{err} = |\sigma_d - \hat{\sigma}_d| + |\omega_d - \hat{\omega}_d|$$

Podemos encontrar en las dos “estrellas del orden” (amortiguación y frecuencia) regiones alrededor del origen donde os_{err} es más pequeño que un valor límite, tol :

$$os_{err} \leq tol$$

El Dominio de la Precisión VI

Tiene sentido definir un error combinado del error de la amortiguación y el error de la frecuencia:

$$os_{err} = |\sigma_d - \hat{\sigma}_d| + |\omega_d - \hat{\omega}_d|$$

Podemos encontrar en las dos “estrellas del orden” (amortiguación y frecuencia) regiones alrededor del origen donde os_{err} es más pequeño que un valor límite, tol :

$$os_{err} \leq tol$$

Ese dominio también puede usarse como un *dominio de precisión*.

El Dominio de la Precisión VI

Tiene sentido definir un error combinado del error de la amortiguación y el error de la frecuencia:

$$os_{err} = |\sigma_d - \hat{\sigma}_d| + |\omega_d - \hat{\omega}_d|$$

Podemos encontrar en las dos “estrellas del orden” (amortiguación y frecuencia) regiones alrededor del origen donde os_{err} es más pequeño que un valor límite, tol :

$$os_{err} \leq tol$$

Ese dominio también puede usarse como un *dominio de precisión*.

Sin embargo, es mucho más útil que el dominio de precisión definido antes, porque no depende de ningún experimento.

El Dominio de la Precisión VII

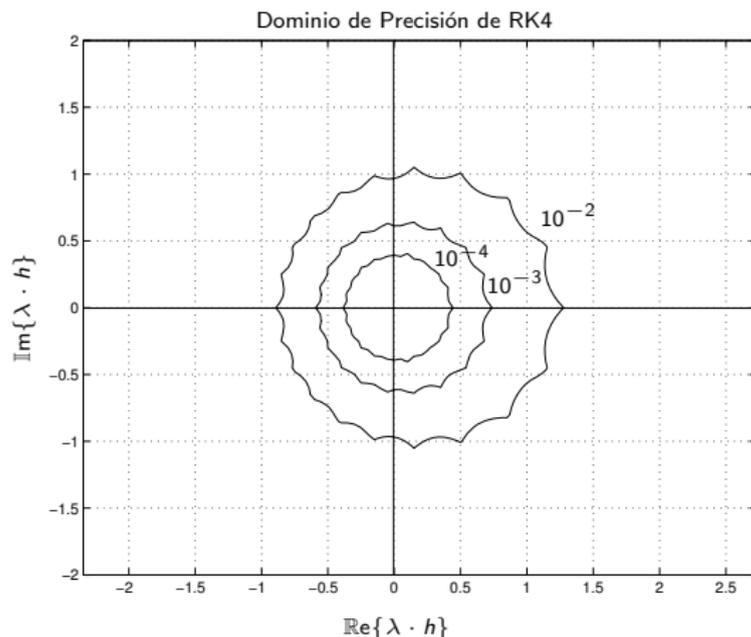


Figure: Dominio de precisión de RK4

El Dominio de la Precisión VIII

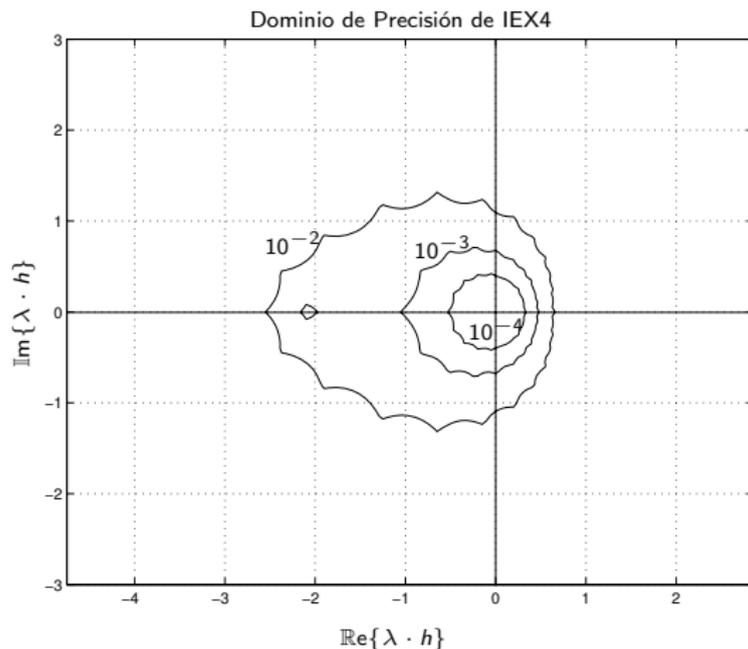


Figure: Dominio de precisión de IEX4

Control del Paso de Integración

Para garantizar la calidad de la simulación numérica podemos controlar o el *paso de integración* o el *orden del método*. Para los algoritmos RK es más común controlar el paso de integración.

Control del Paso de Integración

Para garantizar la calidad de la simulación numérica podemos controlar o el *paso de integración* o el *orden del método*. Para los algoritmos RK es más común controlar el paso de integración.

Para controlar el paso tenemos que estimar el *error local de la integración*.

Control del Paso de Integración

Para garantizar la calidad de la simulación numérica podemos controlar o el *paso de integración* o el *orden del método*. Para los algoritmos RK es más común controlar el paso de integración.

Para controlar el paso tenemos que estimar el *error local de la integración*.

Una manera para hacerlo es repetir el mismo paso dos veces con dos algoritmos diferentes.

Control del Paso de Integración

Para garantizar la calidad de la simulación numérica podemos controlar o el *paso de integración* o el *orden del método*. Para los algoritmos RK es más común controlar el paso de integración.

Para controlar el paso tenemos que estimar el *error local de la integración*.

Una manera para hacerlo es repetir el mismo paso dos veces con dos algoritmos diferentes.

Suponiendo que los dos algoritmos diferentes no producen (por casualidad) el mismo resultado erróneo, podemos implementar el algoritmo siguiente:

$$\varepsilon_{\text{rel}} = \frac{|x_1 - x_2|}{|x_1|}$$

$$\text{if } \varepsilon_{\text{rel}} > \text{tol}_{\text{rel}} \Rightarrow h_{\text{nuevo}} = 0.5 \cdot h$$

$$\text{if } \varepsilon_{\text{rel}} < 0.5 \cdot \text{tol}_{\text{rel}} \text{ durante cuatro pasos} \Rightarrow h_{\text{nuevo}} = 1.5 \cdot h$$

Control del Paso de Integración II

Es un poco peligroso porque puede pasar que $x_1 = 0$ en un cierto punto del tiempo.

Control del Paso de Integración II

Es un poco peligroso porque puede pasar que $x_1 = 0$ en un cierto punto del tiempo.

Por eso, es mejor usar la fórmula mejorada:

$$\varepsilon_{\text{rel}} = \frac{|x_1 - x_2|}{\max(|x_1|, |x_2|, \delta)}$$

donde $\delta = 10^{-10}$ es una constante muy pequeña.

Control del Paso de Integración II

Es un poco peligroso porque puede pasar que $x_1 = 0$ en un cierto punto del tiempo.

Por eso, es mejor usar la fórmula mejorada:

$$\varepsilon_{\text{rel}} = \frac{|x_1 - x_2|}{\max(|x_1|, |x_2|, \delta)}$$

donde $\delta = 10^{-10}$ es una constante muy pequeña.

Sin embargo, no es muy eficiente repetir el paso entero dos veces solamente para obtener una estimación del error local.

Control del Paso de Integración II

Es un poco peligroso porque puede pasar que $x_1 = 0$ en un cierto punto del tiempo.

Por eso, es mejor usar la fórmula mejorada:

$$\varepsilon_{\text{rel}} = \frac{|x_1 - x_2|}{\max(|x_1|, |x_2|, \delta)}$$

donde $\delta = 10^{-10}$ es una constante muy pequeña.

Sin embargo, no es muy eficiente repetir el paso entero dos veces solamente para obtener una estimación del error local.

Entretanto existen *códigos empotrados* donde dos algoritmos diferentes comparten algunas etapas.

El Código RKF4/5

El código *Runge-Kutta-Fehlberg 4/5 (RKF4/5)* es un de los códigos empotrados con la tabla de Butcher:

0	0	0	0	0	0	0
1/4	1/4	0	0	0	0	0
3/8	3/32	9/32	0	0	0	0
12/13	1932/2197	-7200/2197	7296/2197	0	0	0
1	439/216	-8	3680/513	-845/4104	0	0
1/2	-8/27	2	-3544/2565	1859/4104	-11/40	0
x_1	25/216	0	1408/2565	2197/4104	-1/5	0
x_2	16/135	0	6656/12825	28561/56430	-9/50	2/55

Ese código contiene un RK4 en cinco etapas y otro RK5 en seis etapas:

$$f_1(q) = 1 + q + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{6}q^3 + \frac{1}{24}q^4 + \frac{1}{104}q^5$$

$$f_2(q) = 1 + q + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{6}q^3 + \frac{1}{24}q^4 + \frac{1}{120}q^5 + \frac{1}{2080}q^6$$

El Código RKF4/5 II

Entonces:

$$\varepsilon(q) = f_1(q) - f_2(q) = \frac{1}{780}q^5 - \frac{1}{2080}q^6$$

y por eso:

$$\varepsilon \sim h^5$$

Concluimos:

$$h \sim \sqrt[5]{\varepsilon}$$

El Código RKF4/5 II

Entonces:

$$\varepsilon(q) = f_1(q) - f_2(q) = \frac{1}{780}q^5 - \frac{1}{2080}q^6$$

y por eso:

$$\varepsilon \sim h^5$$

Concluimos:

$$h \sim \sqrt[5]{\varepsilon}$$

Queremos:

$$tol_{rel} = \frac{|x_1 - x_2|}{\max(|x_1|, |x_2|, \delta)}$$

y por eso tiene sentido proponer:

$$h_{nuevo} = \sqrt[5]{\frac{tol_{rel} \cdot \max(|x_1|, |x_2|, \delta)}{|x_1 - x_2|}} \cdot h_{viejo}$$

El Código RKF4/5 II

Entonces:

$$\varepsilon(q) = f_1(q) - f_2(q) = \frac{1}{780}q^5 - \frac{1}{2080}q^6$$

y por eso:

$$\varepsilon \sim h^5$$

Concluimos:

$$h \sim \sqrt[5]{\varepsilon}$$

Queremos:

$$tol_{rel} = \frac{|x_1 - x_2|}{\max(|x_1|, |x_2|, \delta)}$$

y por eso tiene sentido proponer:

$$h_{nuevo} = \sqrt[5]{\frac{tol_{rel} \cdot \max(|x_1|, |x_2|, \delta)}{|x_1 - x_2|}} \cdot h_{viejo}$$

De esa manera, si el error es demasiado grande, el *próximo paso* se reduce, y si el error es innecesariamente pequeño, el próximo paso se aumenta. Pasos no se repiten nunca aunque el error sea excesivo.

El Código RKF4/5 II

Entonces:

$$\varepsilon(q) = f_1(q) - f_2(q) = \frac{1}{780}q^5 - \frac{1}{2080}q^6$$

y por eso:

$$\varepsilon \sim h^5$$

Concluimos:

$$h \sim \sqrt[5]{\varepsilon}$$

Queremos:

$$tol_{rel} = \frac{|x_1 - x_2|}{\max(|x_1|, |x_2|, \delta)}$$

y por eso tiene sentido proponer:

$$h_{nuevo} = \sqrt[5]{\frac{tol_{rel} \cdot \max(|x_1|, |x_2|, \delta)}{|x_1 - x_2|}} \cdot h_{viejo}$$

De esa manera, si el error es demasiado grande, el *próximo paso* se reduce, y si el error es innecesariamente pequeño, el próximo paso se aumenta. Pasos no se repiten nunca aunque el error sea excesivo.

Se trata entonces de un *esquema optimista* de control.

Control del Paso de Integración III

Podemos interpretar el problema del control del paso de integración como un *problema de control discreto*.

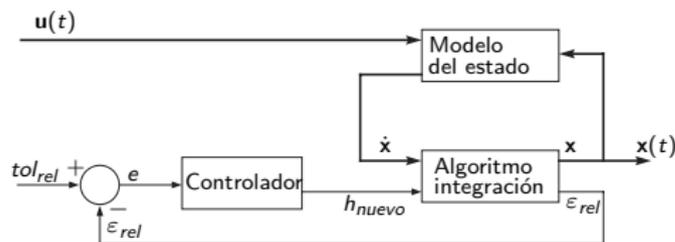


Figure: Control del paso interpretado como problema de control

Control del Paso de Integración IV

Un *controlador del tipo PI* fue desarrollado por Gustafsson:

$$h_{\text{nuevo}} = \left(\frac{0.8 \cdot \text{tol}_{\text{rel}}}{\varepsilon_{\text{rel}_{\text{nuevo}}}} \right)^{\frac{0.3}{n}} \cdot \left(\frac{\varepsilon_{\text{rel}_{\text{viejo}}}}{\varepsilon_{\text{rel}_{\text{nuevo}}}} \right)^{\frac{0.4}{n}} \cdot h_{\text{viejo}}$$

donde:

$$\varepsilon_{\text{rel}_{\text{nuevo}}} = \frac{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_{\infty}}{\max(\|\mathbf{x}_1\|_2, \|\mathbf{x}_2\|_2, \delta)}$$

$$\varepsilon_{\text{rel}_{\text{viejo}}} = \text{la misma cantidad un paso hacia atrás}$$

Conclusiones

Conclusiones

- ▶ En esta presentación desarrollamos un *tratamiento de la precisión* de los algoritmos de la integración numérica tan sólido como el de la estabilidad numérica derivado antes.

Conclusiones

- ▶ En esta presentación desarrollamos un *tratamiento de la precisión* de los algoritmos de la integración numérica tan sólido como el de la estabilidad numérica derivado antes.
- ▶ Introdujimos un *análisis en el “dominio de la frecuencia”* similar al tratamiento de sistemas lineales discretos común en el tratamiento de sistemas de control.

Conclusiones

- ▶ En esta presentación desarrollamos un *tratamiento de la precisión* de los algoritmos de la integración numérica tan sólido como el de la estabilidad numérica derivado antes.
- ▶ Introdujimos un *análisis en el “dominio de la frecuencia”* similar al tratamiento de sistemas lineales discretos común en el tratamiento de sistemas de control.
- ▶ Enseñamos *métodos para la visualización de las propiedades de la precisión* de un algoritmo numérico para la simulación usando *gráficos de amortiguación y frecuencia*. Además enseñamos las bonitas *“estrellas del orden”* de la amortiguación y de la frecuencia de un algoritmo de integración.

Conclusiones

- ▶ En esta presentación desarrollamos un *tratamiento de la precisión* de los algoritmos de la integración numérica tan sólido como el de la estabilidad numérica derivado antes.
- ▶ Introdujimos un *análisis en el “dominio de la frecuencia”* similar al tratamiento de sistemas lineales discretos común en el tratamiento de sistemas de control.
- ▶ Enseñamos *métodos para la visualización de las propiedades de la precisión* de un algoritmo numérico para la simulación usando *gráficos de amortiguación y frecuencia*. Además enseñamos las bonitas *“estrellas del orden”* de la amortiguación y de la frecuencia de un algoritmo de integración.
- ▶ La presentación acabó con la discusión del *control del paso de integración*.