

# Abtastsysteme im Bildbereich

Prof. Dr. François E. Cellier  
Institut für Computational Science  
ETH Zürich

June 1, 2006

Der Abtastvorgang

Shannon's Abtasttheorem

Abtasten mit Laplace Transformation

Abtasten mit ZOH

# Der Abtastvorgang

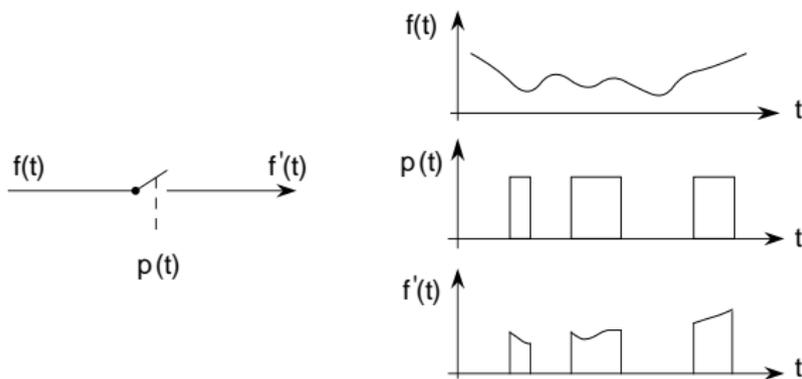


Figure: Abtaster und zugehörige Signalverläufe

$$f'(t) = p(t)f(t)$$

## Der Abtastvorgang II

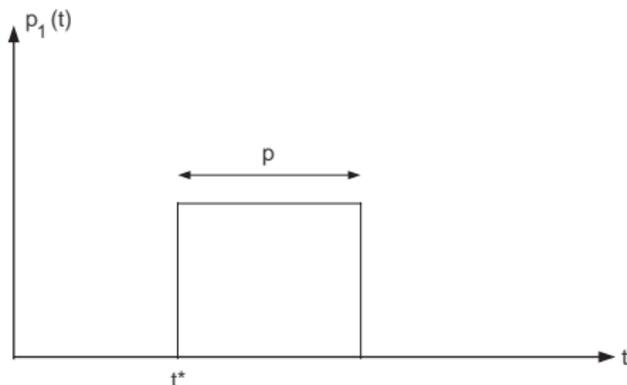


Figure: Einzelpuls

$$p_1(t) = \varepsilon(t - t^*) - \varepsilon(t - t^* - p)$$

# Der Abtastvorgang III

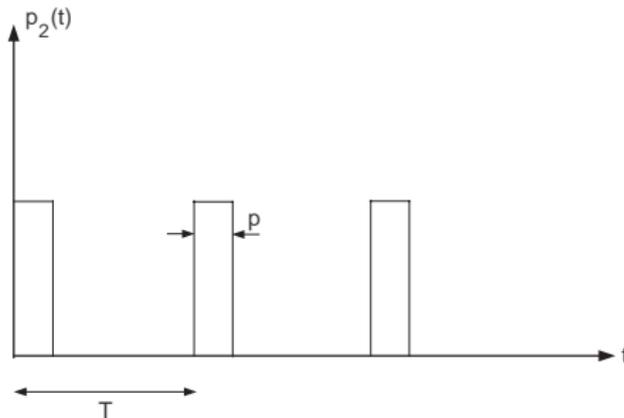


Figure: Angestossene Pulschette

$$p_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \{\varepsilon(t - kT) - \varepsilon(t - kT - p)\} \quad ; \quad p < T$$

# Der Abtastvorgang IV

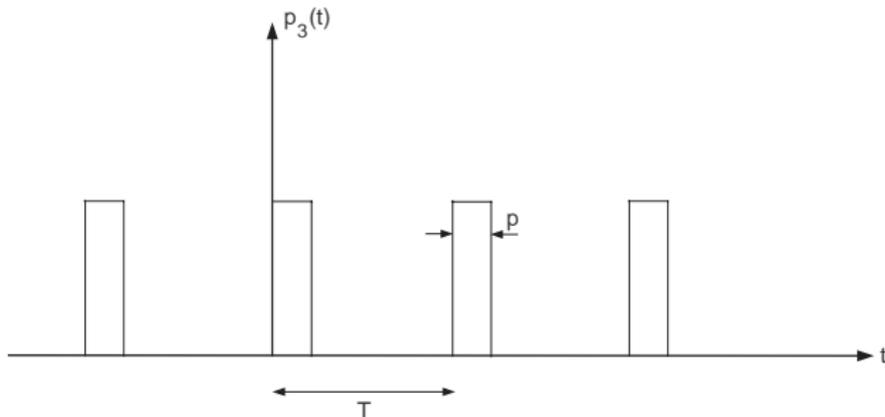


Figure: Periodische Pulschette

$$p_3(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{\varepsilon(t - kT) - \varepsilon(t - kT - p)\} \quad ; \quad p < T$$

# Der Abtastvorgang V

$p_3(t)$  ist ein periodisches Signal. Somit kann  $p_3(t)$  in eine Fourierreihe entwickelt werden:

$$p_3(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_s t} \quad ; \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T p_3(\tau) e^{-jn\omega_s \tau} d\tau$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow C_n &= \frac{1}{T} \int_0^P e^{-jn\omega_s \tau} d\tau = \frac{1 - e^{-jn\omega_s P}}{jn\omega_s T} \\ &= \frac{P}{T} \operatorname{sinc}\left(n\omega_s \frac{P}{2}\right) e^{-jn\omega_s \frac{P}{2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p_3(t) = \frac{P}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(n\omega_s \frac{P}{2}\right) e^{jn\omega_s \left(t - \frac{P}{2}\right)}$$

# Der Abtastvorgang VI

Wir verwenden nun  $p_3(t)$  als Abtastsignal:

$$f_p^*(t) = f(t)p_3(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n f(t) e^{jn\omega_s t}$$

$f_p^*(t)$  ist ein nicht periodisches Signal, welches jedoch ein Fourier Spektrum besitzt:

$$\begin{aligned} F_p^*(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_p^*(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n f(\tau) e^{jn\omega_s \tau} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ C_n \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{jn\omega_s \tau} e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} \end{aligned}$$

## Der Abtastvorgang VII

Das kontinuierliche signal  $f(t)$  besitzt aber ebenfalls ein Fourier Spektrum:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Auf Grund des Shifting Theorems der Fourieranalyse:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} \cdot e^{jn\omega_s\tau} d\tau = F(j\omega - jn\omega_s)$$

Somit:

$$\begin{aligned} F_p^*(j\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ C_n \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{jn\omega_s t} e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ C_n F(j\omega - jn\omega_s) \right\} \end{aligned}$$

# Shannon's Abtasttheorem

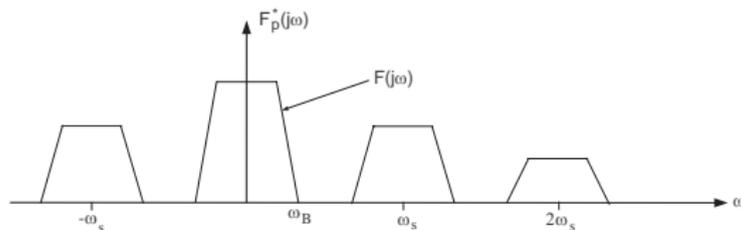


Figure: Shannon's Abtasttheorem

Das ursprüngliche Signal kann aus dem abgetasteten durch einen Tiefpass regeneriert werden, falls:

$$\omega_s \geq 2\omega_B$$

Sonst gibt es "Aliasing". Somit ist die Abtastperiode von unten durch die Technologie (Rechengeschwindigkeit, Wandlerverhalten) und von oben durch das Abtasttheorem begrenzt.

# Abtasten mit Laplace Transformation

$$F_p^*(s) = \mathcal{L}\{f_p^*(t)\} = \mathcal{L}\{f(t) \cdot p_2(t)\} = F(s) * P_2(s)$$

$$\begin{aligned} p_2(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \{\varepsilon(t - kT) - \varepsilon(t - kT - p)\} \\ \Rightarrow P_2(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{s} e^{-kTs} - \frac{1}{s} e^{-(kT+p)s} \right\} \\ &= \frac{1 - e^{-ps}}{s} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \{e^{-kTs}\} \\ &= \frac{1 - e^{-ps}}{s} \cdot [1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \dots] \\ &= \frac{1 - e^{-ps}}{s} \cdot x \end{aligned}$$

## Abtasten mit Laplace Transformation II

$$\begin{aligned}x &= 1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \dots \\ \Rightarrow e^{-Ts} \cdot x &= e^{-Ts} + e^{-2Ts} + e^{-3Ts} \dots\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x - e^{-Ts} \cdot x = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{1 - e^{-Ts}}$$

$$\Rightarrow P_2(s) = \frac{1 - e^{-ps}}{s(1 - e^{-Ts})}$$

## Abtasten mit Laplace Transformation III

Unter der Annahme, dass  $p \ll T$ :

$$f_p^*(t) \approx \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot \{\varepsilon(t - kT) - \varepsilon(t - kT - p)\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F_p^*(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - e^{-ps}}{s} f(kT) e^{-kTs} \\ &= \frac{1 - e^{-ps}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-kTs} \end{aligned}$$

Unter der Annahme eines idealen Abtasters:

$$\begin{aligned} f^*(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot \delta(t - kT) \\ \Rightarrow F^*(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-kTs} \quad \Rightarrow F_p^*(s) = \frac{1 - e^{-ps}}{s} F^*(s) \end{aligned}$$

## Abtasten mit Laplace Transformation IV

Unter der Annahme, dass  $p \ll T$ :

$$1 - e^{-ps} = 1 - \left[ 1 - ps + \frac{p^2 s^2}{2!} - \frac{p^3 s^3}{3!} \pm \dots \right]$$
$$\approx ps$$

$$\Rightarrow F_p^*(s) \approx pF^*(s)$$

Wenn wir  $p$  gegen null gehen lassen, geht  $F_p^*(s)$  nicht gegen  $F^*(s)$  sondern gegen null. Somit darf die Höhe des Pulses beim Übergang zum idealen Abtaster nicht konstant gehalten werden. Stattdessen muss die Höhe des Pulses gegen  $\infty$  wachsen, so dass die Fläche unter dem Puls konstant bleibt. Dies entspricht der Definition des Dirac Impulses.

## Abtasten mit ZOH

$$f_h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \{ \varepsilon(t - kT) - \varepsilon(t - (k+1)T) \}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F_h(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \left\{ \frac{1}{s} e^{-kTs} - \frac{1}{s} e^{-(k+1)Ts} \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot \frac{1}{s} (1 - e^{-Ts}) e^{-kTs} \\ &= \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-kTs} \\ &= \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot F^*(s) \end{aligned}$$