

# Analyse diskreter Systeme im Zustandsraum II

Prof. Dr. François E. Cellier  
Institut für Computational Science  
ETH Zürich

June 22, 2006

Beobachtbarkeit, Rekonstruierbarkeit, Detektierbarkeit

Minimale Realisierung

Balancierte Realisierung

# Beobachtbarkeit, Rekonstruierbarkeit, Detektierbarkeit

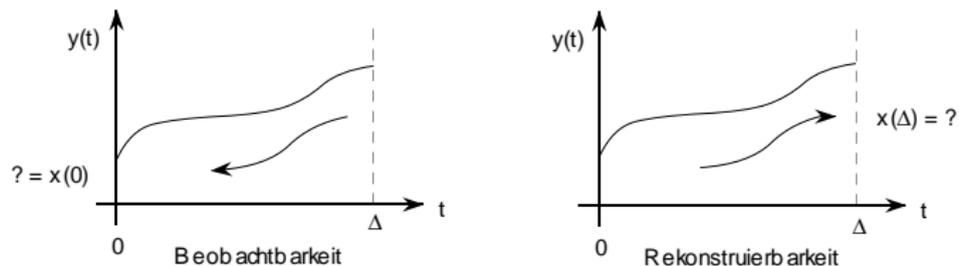


Figure: Konzepte der Betrachtung vom Ausgang her

# Beobachtbarkeit

Da die Beobachtbarkeit eine Systemeigenschaft ist, die unabhängig vom Eingangssignal gelten muss, darf  $u(k) = 0$  gesetzt werden. Somit gilt:

$$y(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0$$

Mit  $\mathcal{Y} = [y(0), y(1), \dots, y(n-2), y(n-1)]^T$  kann dies wie folgt geschrieben werden:

$$\mathcal{Y} = \mathcal{O} \cdot \mathbf{x}_0$$

wobei:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

die Beobachtbarkeitsmatrix ist.

# Beobachtbarkeit II

$\mathbf{x}_0$  kann aus Messungen von  $\mathcal{Y}$  ermittelt werden, falls die Beobachtbarkeitsmatrix den vollen Rang besitzt:

$$\mathbf{x}_0 = \mathcal{O}^{-1} \cdot \mathcal{Y}$$

Falls zusätzliche Messungen verfügbar sind, definieren wir:

$$\mathcal{Y}_\Delta = [y(0), y(1), \dots, y(\Delta - 2), y(\Delta - 1)]^T$$

und somit:

$$\mathcal{Y}_\Delta = \mathcal{O}_\Delta \cdot \mathbf{x}_0$$

## Beobachtbarkeit III

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_\Delta &= \mathcal{O}_\Delta \cdot \mathbf{x}_0 \\ \Rightarrow \mathcal{O}_\Delta^T \cdot \mathcal{Y}_\Delta &= \mathcal{O}_\Delta^T \cdot \mathcal{O}_\Delta \cdot \mathbf{x}_0 \\ \Rightarrow (\mathcal{O}_\Delta^T \cdot \mathcal{O}_\Delta)^{-1} \cdot \mathcal{O}_\Delta^T \cdot \mathcal{Y}_\Delta &= \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

$(\mathcal{O}_\Delta^T \cdot \mathcal{O}_\Delta)^{-1} \cdot \mathcal{O}_\Delta^T$  ist die Penrose-Moore Pseudoinverse von  $\mathcal{O}_\Delta$ .

$$\mathcal{O}_\Delta^T \cdot \mathcal{O}_\Delta = \mathcal{G}_o(\Delta) = \sum_{k=0}^{\Delta-1} (\mathbf{A}^k)^T \mathbf{c} \mathbf{c}^T (\mathbf{A}^k)$$

ist die Gram'sche Beobachtbarkeitsmatrix, welche bei unendlicher Beobachtungsdauer der Lyapunov Gleichung:

$$\mathbf{A}^T \mathcal{G}_o \mathbf{A} - \mathcal{G}_o = -\mathbf{c} \mathbf{c}^T$$

genügt.

# Beobachtbarkeit IV

Auf Grund des *Dualitätsprinzips* ist es nicht notwendig, neue Algorithmen für die Beobachtbarkeit zu entwickeln. Alle Beobachtbarkeitseigenschaften eines linearen Systems können ermittelt werden, indem nach den Steuerbarkeitseigenschaften des dualen Systems gesucht wird.

# Minimale Realisierung

Lineare Systeme im Zeitbereich können nichtsteuerbare und/oder nichtbeobachtbare Subsysteme aufweisen. Eine minimale Realisierung erhält man, indem man zunächst das Gesamtsystem in ein erreichbares und ein nicht erreichbares Subsystem zerlegt.

Dazu kann der Algorithmus der letzten Vorlesungsbeilage verwendet werden. Das erreichbare Subsystem mag immer noch nichtbeobachtbare Teile aufweisen. Somit wird das erreichbare Subsystem dualisiert. Danach wird derselbe Algorithmus nochmals auf das duale System angewandt.

Zuletzt muss die Dualitätstransformation rückgängig gemacht werden, indem das nochmals reduzierte System wiederum dualisiert wird.

# Balancierte Realisierung

Die Gram'schen Matrizen sind *nicht* invariant bezüglich Ähnlichkeitstransformationen:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathcal{G}}_c &= \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\mathbf{A}}^k \hat{\mathbf{b}} \hat{\mathbf{b}}^T (\hat{\mathbf{A}}^k)^T \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (\Pi^{-1} \mathbf{A} \Pi)^k (\Pi^{-1} \mathbf{b}) ((\Pi^{-1} \mathbf{b})^T) ((\Pi^{-1} \mathbf{A} \Pi)^k)^T \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \Pi^{-1} \mathbf{A}^k \Pi \cdot \Pi^{-1} \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T (\Pi^{-1})^T \cdot \Pi^T (\mathbf{A}^k)^T (\Pi^{-1})^T \\
 &= \Pi^{-1} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \mathbf{b} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^k)^T \right\} (\Pi^{-1})^T \\
 &= \Pi^{-1} \cdot \mathcal{G}_c \cdot (\Pi^{-1})^T
 \end{aligned}$$

# Balancierte Realisierung II

Entsprechend:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathcal{G}}_o &= \sum_{k=0}^{\infty} (\hat{\mathbf{A}}^k)^T \hat{\mathbf{c}} \hat{\mathbf{c}}^T \hat{\mathbf{A}}^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} ((\Pi^{-1} \mathbf{A} \Pi)^k)^T (\Pi^T \mathbf{c}) (\mathbf{c}^T \Pi) ((\Pi^{-1} \mathbf{A} \Pi)^k) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \Pi^T (\mathbf{A}^k)^T (\Pi^{-1})^T \cdot \Pi^T \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}^T \Pi \cdot \Pi^{-1} \mathbf{A}^k \Pi \\
 &= \Pi^T \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{A}^k)^T \mathbf{c} \mathbf{c}^T \mathbf{A}^k \right\} \Pi \\
 &= \Pi^T \cdot \mathcal{G}_o \cdot \Pi
 \end{aligned}$$

# Balancierte Realisierung III

Aber:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{G}}_c \hat{\mathcal{G}}_o &= (\Pi^{-1} \cdot \mathcal{G}_c \cdot (\Pi^{-1})^T)(\Pi^T \cdot \mathcal{G}_o \cdot \Pi) \\ &= \Pi^{-1} \cdot \mathcal{G}_c \mathcal{G}_o \cdot \Pi\end{aligned}$$

Somit sind die Eigenwerte von  $\mathcal{G}_c \mathcal{G}_o$  invariant bezüglich Ähnlichkeitstransformationen.

Je grösser  $\|\mathcal{G}_c\|$ , desto steuerbarer ist das System. Je grösser  $\|\mathcal{G}_o\|$ , desto beobachtbarer ist das System.

Jedoch ist  $\|\mathcal{G}_c \mathcal{G}_o\|$  invariant bezüglich Ähnlichkeitstransformationen, aber:

$$\|\mathcal{G}_c \mathcal{G}_o\| = \|\mathcal{G}_c\| \cdot \|\mathcal{G}_o\|$$

Wenn also ein System durch Ähnlichkeitstransformation steuerbarer gemacht wird, wird es gleichzeitig weniger beobachtbar.

# Balancierte Realisierung IV

Es mag somit sinnvoll sein, ein Ähnlichkeitstransformation zu suchen bei der:

$$\|\mathcal{G}_c\| = \|\mathcal{G}_o\|$$

Gleichzeitig ist es möglich, beide Gram'schen Matrizen zu diagonalisieren, so dass die absolut grössten Diagonalelemente zuoberst in der Liste stehen.

Eine solche Transformation kann leicht mittels Zerlegung nach singulären Werten ( $\rightarrow$  singular value decomposition) gefunden werden.

Die am wenigsten steuerbaren und beobachtbaren Zustände sind dann die letzten im Zustandsvektor. Falls die entsprechenden Diagonalwerte von  $\mathcal{G}_c$  und  $\mathcal{G}_o$  genügend klein sind, kann das transformierte System durch seine Hauptkomponenten angenähert werden.